



La proporcionalidad en la formación de profesores. Del Programa Cognitivo al Programa Epistemológico

Proportionality in teacher training. From the Cognitive Program to the Epistemological Program

Maricela Soto Quiñones^a | Luis Manuel Aguayo Rendón^b | Orlando Daniel Jiménez Longoria^c

^a Benemérita Escuela Normal "Manuel Ávila Camacho", México. Contacto: sotoqm23@gmail.com

^b Universidad Pedagógica Nacional, México.

^c Benemérita Escuela Normal "Manuel Ávila Camacho", México.

Resumen

En el campo de la Didáctica de las Matemáticas, la línea de estudios sobre la formación de profesores es tal vez una de las más consolidadas. A la fecha existen desarrollos teóricos que han permitido mejorar el análisis sobre los procesos de formación inicial en la docencia y la comprensión de los fenómenos educativos que inciden en el aprendizaje y la enseñanza de esta disciplina. El caso de la proporcionalidad ilustra de buena manera la evolución que han tenido los trabajos en esta área del conocimiento para la formación del profesorado. En este contexto, el objetivo del presente artículo es revisar algunos estudios sobre la proporcionalidad realizados desde dos de los principales programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas: el Programa Cognitivo, que plantea la importancia del conocimiento disciplinar y las concepciones del profesor; y el Programa Epistemológico, centrado en las praxeologías que despliega el profesor durante la resolución de tareas matemáticas y la implementación de dispositivos de formación.

Palabras clave:

Proporcionalidad, saberes del profesor, praxeologías y dispositivos didácticos.

Abstract

In the field of Mathematics Didactics, the line of studies on teacher training is perhaps one of the most consolidated. To date, there are theoretical developments that have allowed us to improve the analysis of the initial training processes in teaching and understanding of the educational phenomena that affect the learning and teaching of this discipline. The case of proportionality illustrates, in a good way, the evolution that work has had in this area of knowledge for teacher training. In this context, the aim of this article is to review some studies on proportionality carried out from two of the main research programs in Mathematics Didactics: The Cognitive Program, that raises the importance of disciplinary knowledge and the teacher's conceptions; and the Epistemological focused on the praxeologies, that the teacher deploys during the resolution of mathematical tasks and the implementation of training devices.

Keywords:

Proportionality, teacher knowledge, praxeologies and teaching devices.

Recibido: 2 de diciembre de 2023 | Aceptado: 24 de enero de 2024

1. Introducción

Dentro de las perspectivas desde las cuales se han caracterizado los fenómenos educativos, una de las líneas recién surgidas en la Didáctica de las Matemáticas es aquella que estudia la formación de profesores. A pesar de su reciente surgimiento es quizá una de las más delimitadas, ya que actualmente existen desarrollos teóricos que han sido útiles para depurar el análisis sobre los procesos de formación de profesores, específicamente los que conciernen al tipo de conocimiento que adquieren sobre las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza, pero también para mostrar aquellos cuyo objeto de investigación se remite a la actividad matemática como una construcción social que viven y gestionan los profesores en las instituciones educativas.

En los últimos años en México, la investigación sobre la formación de profesores se ha centrado en aspectos fundamentales como son: la construcción de identidades durante el hacer docente, el capital cultural de los estudiantes para profesor, su construcción como sujeto social, el desarrollo de competencias docentes para el uso de tecnologías y, en menor medida, se han desarrollado estudios que analizan las reformas en las instituciones formadoras de docentes (Hernández, 2013; Atriano, et al., 2013). Estas investigaciones, así como sus resultados reflejan las preocupaciones que se han instalado en el campo de la investigación sobre la formación de profesores noveles o experimentados.

Sin embargo, se ha observado que el sistema educativo ha promovido una mayor especificidad en la formación de una o profesor "enseñante", fundamentalmente a partir de 1997 inicia una reforma curricular donde se incluyó la idea de que las y los futuros profesores tendrían que formarse mediante el estudio profundo de un mayor número de saberes didácticos y disciplinares (SEP, 2002). Es en esta tendencia que los contenidos de saber disciplinarios, como la proporcionalidad, se tornan en objetos de estudio y de aprendizaje en las instituciones formadoras de docentes y al mismo tiempo son un objeto de enseñanza en las escuelas de educación básica. En estas últimas se hace necesario desplegar múltiples situaciones que ponen en juego un gran número de saberes aritméticos (fracciones, porcentajes, números decimales, medida, operaciones básicas, razón y proporción) que permiten resolver distintas tareas problemáticas, pero en la formación estas situaciones deberán complementarse con otras que permitan a los sujetos construir saberes didácticos.

Por la característica anterior de ser contenido de saber en dos instituciones distintas, la proporcionalidad ha sido objeto de numerosas investigaciones que, generalmente, han revisado los procedimientos y estrategias de resolución que utilizan los alumnos de diferentes niveles educativos para resolver situaciones problemáticas (Vergnaud, et al., 1979; Pluvinage y Dupuis, 1981 y Sokona, 1989, como se citó en Ruiz, 2021). No obstante, lo numeroso de los estudios en torno a la proporcionalidad, los trabajos que

abordan la problemática del profesorado o del estudiantado para profesor son escasos (Pezzard, 1985; Thompson y Thompson, 1996; Klemmer y Peled, 1998; Comin, 2002 y Lo, 2004, como se citó en Ruiz, 2021). Algunos trabajos que pueden ubicarse en esta línea son aquellos que exponen las dificultades de las y los estudiantes para profesor y del profesorado en servicio para resolver situaciones que implican el uso del razonamiento proporcional (Rivas, et al., 2012; Perry, et al., 2003), tales dificultades señalan estos estudios, derivan de un bajo nivel de comprensión del paquete de conocimientos propios de este concepto matemático, así como de la falta de habilidades para utilizar las técnicas y propiedades que le subyacen a este tipo de razonamiento.

En términos generales los estudios que se han desarrollado en los últimos años pueden situarse en dos vertientes que corresponden con diferentes etapas de científicidad en Didáctica de las Matemáticas y que además pueden ubicarse en dos programas de investigación en el sentido de Lakatos (1971, como se citó en Gascón, 2002): el Programa Cognitivo asociado a los conocimientos y al pensamiento del profesor y; el Programa Epistemológico que postula la centralidad del saber y la actividad matemática (praxis) desde un enfoque antropológico. La influencia de estos dos programas de investigación se ha dejado sentir en la mayoría de los estudios de esta disciplina desarrollados desde la primera década de este siglo, en ellos se observó el interés por indagar el conocimiento del profesorado respecto de las matemáticas y su enseñanza mediante el análisis sobre sus concepciones, perspectivas y puesta en práctica de estrategias o dispositivos de formación.

Sin embargo este objeto de análisis primigenio fue modificándose posteriormente, es por ello que en este trabajo el objetivo es hacer una revisión de los estudios realizados desde los Programas Cognitivo y Epistemológico de la Didáctica de las Matemáticas en el contexto de la proporcionalidad y la formación de profesores, particularmente se analizan investigaciones sobre los saberes implícitos en dicha formación y la puesta en práctica de esos saberes; se coloca como objeto central de la revisión las principales discusiones sobre el desarrollo, experiencias y perspectivas en el abordaje de esta noción matemática, así como los núcleos de tensión que al respecto se han establecido en el escenario de la formación inicial del profesorado.

2. Metodología

El estudio se basa en un diseño cualitativo con un alcance exploratorio, la indagación fue de tipo documental y se establecieron dos categorías de análisis de carácter inductivo que determinaron la selección y sistematización de la muestra documental (Tabla 1):

Tabla 1

Categorías de análisis

Categorías	Bloques temáticos
Programa Cognitivo	Conocimientos del profesorado relativos a la proporcionalidad Conocimientos del profesorado sobre la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad
Programa Epistemológico	Praxeologías matemáticas y didácticas en la formación. Dispositivos de formación para la proporcionalidad

Nota: Elaboración propia

Para sistematizar las investigaciones encontradas y considerando el objetivo de la investigación, se organizaron dos bloques que constituyen las principales categorías de análisis. En el primero, referido al Programa Cognitivo, se ubicaron los estudios sobre el pensamiento del profesorado, es decir sobre sus conocimientos acerca de la proporcionalidad, de su aprendizaje y de su enseñanza. En el segundo referente al programa epistemológico, se ubicaron los estudios sobre las praxeologías estudiadas en la actividad matemática y la producción del conocimiento a partir de dispositivos de formación.

La búsqueda de investigaciones sobre estas temáticas se basó fundamentalmente en revistas indexadas, libros electrónicos, tesis de posgrado y actas de congresos, para ello se recurrió a bases de datos como Scopus, Google académico, Redalyc, SciELO, Dialnet, Research Gate y Academia. Fundamentalmente, se consideraron las investigaciones realizadas durante los últimos 20 años derivadas de palabras clave de identificación como: concepciones, saberes y pensamiento del profesor, praxeologías y dispositivos didácticos, Teoría Antropológico de lo Didáctico, proporcionalidad y formación de profesores. La delimitación temporal se realizó tomando en cuenta que a partir de la década de los noventa del siglo pasado se comienza a observar una clara división entre las investigaciones focalizadas en el pensamiento del profesor respecto de aquellas que colocaban en el centro la actividad matemática. Otro factor es que una década después aparecen numerosos estudios que se preguntan por el equipamiento cognitivo y procedimental del profesorado, y las acciones que en las instituciones formadoras de docentes deben impulsarse para lograr dicho equipamiento.

3. Resultados y discusión

Para analizar los datos surgidos de la exploración documental se procedió a sistematizar la información a partir de la relación entre la Didáctica de las Matemáticas y la formación de profesores a través de los dos programas de investigación: el Cognitivo y el Epistemológico, en ambos casos se establecieron subcategorías relacionadas particularmente a un cierto

tipo de conocimiento, a las praxeologías del profesor y a los dispositivos de formación (Tabla 2):

Tabla 2

Estudios vinculados a los programas de investigación

Categorías	Bloques temáticos	Hallazgos
Programa Cognitivo	Conocimientos del profesorado relativos a la proporcionalidad	(Ball, 1990; Even, 1990; Graeber et al., 1989; Reyes, 1974; Simon, 1993; Wheeler, 1983; como se citó en Valverde y Castro, 2009). Rivas et al., (2012). (Harel y Behr, 1995; Riley, 2010 como se citó en Valverde, 2012). Balderas et al., (2014). Ruiz (2021).
	Conocimientos del profesorado sobre la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad	(Carrillo-Yañez, et al, 2018 como se citó en Escudero y Carrillo, 2021). (Balderas y Guerra, 2014, Torres, 2015, Amado y Muñoz, 2015 como se citó en Fuentes, 2020). Fuentes (2020). Rivas et al., (2019). Torres y Deulofeu (2020).
Programa epistemológico	Praxeologías matemáticas y didácticas en la formación.	Bosch (1995). Bolea et al., (2001). Ruiz y García (2011). Sureda (2010). Gascón (2011). Sánchez (2013). Bosch (2006). Vega (2021).
	Dispositivos de formación para la proporcionalidad	Parra y Otero (2018). García (2005). Ruiz-Olarría et al., (2019). Florensa, et al., (2020).

Nota: Elaboración propia

3.1. El programa cognitivo o los conocimientos del profesor

El Programa Cognitivo de investigación en Didáctica de las Matemáticas tuvo su origen en la necesidad de modelizar el aprendizaje matemático y la consideración de integrar lo pedagógico-cognitivo con lo matemático, su principal objeto de estudio se orientó al

conocimiento matemático del alumno y en los últimos años a las prácticas docentes y concepciones del profesorado de matemáticas (Gascón, 2002).

Desde la década de los ochenta del siglo pasado, en los trabajos de Shulman (1986) sobre el conocimiento pedagógico del contenido, ya se apreciaba un interés creciente por estudiar los saberes fundamentales del profesorado profesional. Posteriormente, la producción investigativa sobre el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas mostró un notable crecimiento que se vio reflejado en revistas científicas.

A partir de los años noventa las investigaciones sobre el conocimiento del profesorado tuvieron un notable crecimiento y en su mayoría retomaban los principios establecidos por Shulman (1986), en esta década los estudios vinculados a la formación de profesores y el razonamiento proporcional dejaron su impronta en el diseño y desarrollo de los programas de formación de profesores y esta influencia duró hasta los primeros años del presente siglo.

3.1.1 Conocimientos del profesor relativos a la proporcionalidad

Un tipo de estudios sobre los conocimientos del profesorado se dedicó a analizar las concepciones, percepciones y creencias respecto a la noción de proporcionalidad. Entre estos se encuentra el de Balderas et al. (2014) cuyo propósito era explorar la noción de la proporcionalidad tomando en cuenta los conocimientos de los maestros, para tal efecto se aplicó un cuestionario a maestros de matemáticas de secundaria donde se analizaron las estrategias empleadas y las propiedades derivadas de las relaciones de proporcionalidad en la solución de problemas. Los resultados reflejaron que la mayoría de las y los profesores podían resolver situaciones de valor faltante, reparto proporcional y comparación de razones, no así los problemas donde se utilizan escalas y relación aditiva.

En otro tipo de estudios se analizó el desarrollo del conocimiento del profesor a través de la resolución de problemas de proporcionalidad. Al respecto, Rivas et al. (2012) plantean el desarrollo de un proceso instruccional para el profesorado en formación basado en tres momentos: la resolución de un problema de proporcionalidad; el análisis del problema a través de un enfoque epistémico y; las valoraciones dadas por los futuros profesores sobre tres tipos de respuestas que los alumnos de sexto grado de primaria dieron al problema. Los resultados indicaron que el profesorado en formación tuvo dificultades para reconocer el significado de los elementos lingüísticos, de los conceptos, los procedimientos y los argumentos involucrados en el proceso de investigación.

Por su parte, los estudios focalizados en la resolución de problemas apuntan a que existe una comprensión deficiente sobre la proporcionalidad, ya que generalmente los resolutores se basan en conocimientos procedimentales como el producto cruzado y la regla de tres de los cuales se desconoce su fundamentación para resolver problemas en los

que se involucra la proporcionalidad (Harel y Behr, 1995; Riley, 2010 como se citó en Valverde, 2012).

En otras investigaciones con frecuencia el conocimiento matemático de las y los maestros en formación es descrito como insuficiente (Ball, 1990; Even 1990; Graeber et al., 1989; Reys, 1974; Simon, 1993; Wheeler, 1983; como se citó en Valverde y Castro, 2009). En estas investigaciones se observa que el conocimiento procedimental del profesorado en formación tiene una fuerte influencia de las estrategias y algoritmos relacionados con los significados de la fracción que están alejados de la noción de razón en la que se ubican la proporción y la proporcionalidad. Los estudios anteriores muestran que a pesar de que las y los profesores en formación utilizan estrategias adecuadas para la solución de los problemas planteados, no reconocen el operador escalar, la relación funcional entre cantidades, ni los argumentos que establecen la relación de orden entre dos razones. En este tipo de trabajos una conclusión recurrente señala que la resolución de problemas por parte del profesorado en formación no es suficiente para que puedan gestionar la construcción del razonamiento proporcional en los niños, ya que también requieren el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento de los estudiantes y el contenido y el conocimiento de la enseñanza y el contenido (Valverde y Castro, 2009).

En este mismo sentido, otros estudios señalan que las dificultades que los profesores noveles tienen con la comprensión de los conceptos de razón y proporción se derivan de las experiencias que se vivieron como estudiantes de primaria o secundaria. Al respecto Ruiz (2021) realiza una investigación con profesorado de educación primaria que busca caracterizar e interpretar sus concepciones sobre la proporcionalidad y más específicamente, para analizar las ideas, creencias, teorías implícitas, representaciones, aplicaciones y experiencias que los profesores relacionan con el concepto de proporcionalidad.

En los resultados se encontró que el profesorado considera importante que sus estudiantes reconozcan si una situación es o no de proporcionalidad, si es inversa o directa y si puede resolverse con regla de tres. Las nociones que las y los docentes ponen en juego para reconocer la proporcionalidad en una relación entre magnitudes o en una relación numérica se enfocan en el manejo de una constante, la representación en el plano cartesiano y el crecimiento de una relación. Entre sus dificultades se observó que el profesorado no se desprende del modelo aditivo de la proporcionalidad ni de la idea de que cualquier relación creciente es relación de proporcionalidad, también encontraron debilidades sobre la seguridad de que la constante debe ser multiplicativa y no otra, además manifestaron inestabilidad al asegurar que la recta derivada de una proporcionalidad directa debe pasar por el origen.

3.1.2 Conocimientos del profesor sobre la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad

Otra perspectiva desde la que se han estudiado los conocimientos del profesorado en los últimos años es el Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge -MTSK-), cuya postura se enfoca al estudio, uso y desarrollo del conocimiento profesional del profesorado y a la comprensión de sus procesos de adquisición. Esta perspectiva es considerada una herramienta teórica y analítica que permite clasificar elementos del conocimiento del profesor tomando en cuenta tres dominios en el área de matemáticas: conocimientos matemáticos (CM), conocimientos didácticos del contenido matemático (CDC) y las creencias y concepciones que tiene el profesor sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje (Carrillo-Yañez, et al, 2018 como se citó en Escudero y Carrillo, 2021).

Bajo este enfoque se han realizado diversos estudios que analizan el conocimiento del profesorado sobre la proporcionalidad, (Balderas y Guerra, 2014, Torres, 2015, Amado y Muñoz, 2015 como se citó en Fuentes, 2020). En algunas de estas investigaciones se analizan las interpretaciones que sobre la proporcionalidad tienen las y los profesores y se destaca que en la solución de problemas aparecen procedimientos clásicos como la regla de tres y el valor unitario en detrimento de los procedimientos algebraicos. En lo que toca a la enseñanza, los resultados señalan que, para favorecer el aprendizaje, el profesorado utiliza muy poco los ejemplos, las representaciones y las analogías. Cabe resaltar que las investigaciones de este tipo generalmente recuperan aspectos relacionados con el conocimiento del contenido, del alumnado y de la enseñanza. Uno de los trabajos más recientes de este tipo es el que desarrolla Fuentes (2020) cuyo objetivo era identificar el conocimiento que una profesora de secundaria pone en juego al enseñar la proporcionalidad, lo que se observa es que la docente evidencia conocimiento sobre las propiedades, definiciones, prácticas matemáticas y distintas representaciones basadas en el inicio del estudio de la proporcionalidad desde la perspectiva geométrica.

En otro estudio de este mismo tipo, Rivas et al. (2019) analizan el conocimiento de la proporcionalidad de estudiantes para profesor de matemáticas próximos a egresar de la carrera, los resultados indican que hay un conocimiento parcial sobre la proporcionalidad y su enseñanza, enfocado en la disposición lineal de los puntos en un gráfico cartesiano, la covariación, el uso de reglas intuitivas-cualitativas, el manejo de tablas de magnitudes proporcionales y el uso de relaciones numéricas, situación que demanda un manejo de la proporcionalidad desde una perspectiva holística y global.

Por otro lado, Torres y Deulofeu (2020) hacen un estudio comparativo sobre la enseñanza de la proporcionalidad en sexto grado de primaria y en primer grado de secundaria para identificar los objetivos de enseñanza de dos profesores y la construcción de este concepto matemático, en el primer caso se identificó el manejo constante de tablas de variación proporcional, pero también las dificultades para desarrollar el razonamiento

proporcional de los alumnos. En el segundo caso el profesor pretende lograr la modelización y comprensión de la proporcionalidad al promover entre sus alumnos la aplicación como modelo matemático de situaciones cotidianas.

Como se puede observar, la trayectoria que han seguido los estudios cuyo objeto ha sido el conocimiento del profesorado, se ha orientado cada vez más hacia la especialización, los primeros estudios recurren a la resolución de problemas y conceptualizaciones previas sobre la proporcionalidad para deducir los saberes del profesor, mientras que los últimos trabajos muestran mayor precisión en la categorización de saberes desde modelos teóricos como el MTSK, que recuperan cuestiones específicas como el conocimiento disciplinar, procedimental, estructural y didáctico, mediante la organización en dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesorado lo que permite una categorización más fina para el análisis del saber docente.

3.2. El programa epistemológico o las praxeologías del profesorado

El Programa Epistemológico parte de la premisa de tomar la actividad matemática como objeto de estudio para el análisis didáctico, donde inciden las restricciones de las instituciones en las organizaciones matemático-didácticas (Gascón, 2002). Una etapa más reciente en los estudios sobre la formación de profesores para la enseñanza de las matemáticas está caracterizada por la emergencia de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD). Este período se caracteriza por la evolución del objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas que dejó de centrarse sólo en las prácticas escolares para dar paso al enfoque antropológico inaugurado por Chevallard (1999), la TAD postula la dificultad de interpretar la matemática o la actividad matemática escolar sin tomar en cuenta los fenómenos que subyacen al proceso de reconstrucción matemática y cuyo origen se encuentra en la institución productora del saber matemático.

Desde esta perspectiva, cualquier actividad humana puede representarse a través de un modelo denominado organización praxeológica o praxeología, la cual se modeliza mediante un esquema de cuatro componentes: la tarea a resolver y la técnica que la resuelve, ambos elementos hacen referencia al nivel de lo práctico (praxis) y los dos últimos al nivel del logos (saber), es decir la tecnología o discurso que explica la técnica y la teoría que justifica la tecnología. Este tipo de organizaciones se hacen presentes tanto en el contexto matemático como en el didáctico.

Los trabajos de la TAD han permitido una nueva visión sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, si bien no todos los estudios encontrados se remiten al manejo de la proporcionalidad sí retoman otras nociones como magnitud, razón, variación y relaciones funcionales con las cuales guarda relación.

3.2.1. Praxeologías matemáticas y didácticas en la formación.

Ya desde años anteriores, la preocupación por los saberes matemáticos vistos como praxeologías se había hecho presente. En el contexto de la proporcionalidad y desde el enfoque antropológico Bosch (1995) tomó en cuenta el valor instrumental de los objetos ostensivos (escrituras, discursos y grafismos, entre otros) que pueden ser manipulados en la actividad matemática y mediante el estudio de un cierto número de casos sobre la proporcionalidad (álgebra de magnitudes, símbolo diferencial y el cálculo vectorial) muestra que tanto las técnicas como los tecnologías y teorías que le subyacen son determinados por los objetos ostensivos manipulados, con ello se observa la pertinencia de analizar el papel recíproco que guardan los instrumentos ostensivos en la creación y desarrollo de técnicas matemáticas.

Años más tarde Bolea *et al.* (2001) proponen un modelo específico del álgebra elemental como un instrumento para la modelización algebraica y señalan que su uso llega a modificar la naturaleza de las organizaciones matemático-didácticas. Se explican los procesos transpositivos que permiten reconstruir dichas organizaciones tal como aparece en la enseñanza secundaria obligatoria, para analizar las restricciones que afectan al proceso de algebrización de las organizaciones matemáticas escolares. Con ello se afina la noción de transposición didáctica al señalar que ésta no actúa sobre objetos matemáticos aislados sino sobre praxeologías matemáticas complejas y de permanente reorganización.

Por su parte Ruiz y García (2011) analizaron las praxeologías didácticas para la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil, su objetivo era describir y analizar cómo surgen las praxeologías matemático-didácticas al realizar tareas referidas a la modelización matemática en un sistema dinámico de variación. Para el estudio se contempló un grupo de alumnos de educación infantil con edades entre los tres y seis años y una maestra, el estudio describe las praxeologías matemáticas construidas por los estudiantes y la praxis didáctica de la profesora. En la praxis de la profesora se identificaron seis dimensiones o momentos de estudio: el momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento tecnológico-teórico, el momento de la institucionalización, el momento de trabajo de la técnica y el momento de la evaluación. A decir de los autores, con esta secuencia se construye y prueba un logos didáctico como praxeología didáctica pertinente.

Un estudio que también se sustentó en la perspectiva de la TAD fue realizado por Sureda (2010) al identificar a través de la observación y de algunas entrevistas que un teorema central en los esquemas de los profesores es la subestimación de sus propios alumnos lo que lleva a un aprendizaje mecánico, de tal identificación surgieron algunos objetivos centrados en identificar los teoremas en acto que dirigen las acciones didácticas del profesor. Entre los resultados se señala que las y los profesores suelen mostrar los objetos matemáticos como única validación y son introducidos con una definición que

exclusivamente queda a su cargo, tal actividad de ostensión asume un significado intrínseco a la definición y existencia de los objetos matemáticos. Desde esta perspectiva se deduce que las acciones de enseñanza se basan generalmente en el manejo de técnicas algorítmicas que son funcionales en su propia ejercitación y tal enseñanza no permite facilitar el aprendizaje significativo de los estudiantes, aunque sí el aprendizaje mecánico.

Otro estudio que se fundamenta en la TAD es el de Gascón (2011) quien propone un patrón heurístico del desarrollo de los problemas didácticos y lo ejemplifica con el álgebra elemental. Dicho patrón se estructura en torno a tres dimensiones básicas: la epistemológica, la económico-institucional y la ecológica. La primera alude a lo matemático como el centro del problema, la segunda delimita la unidad de análisis y la tercera refiere las condiciones que permiten o restringen la institucionalización de las matemáticas. De manera específica para la proporcionalidad, la dimensión económico-institucional plantea la necesidad de analizar cómo se interpreta este concepto en la institución docente y de identificar las prácticas matemáticas que derivan de tal conceptualización. Las aseveraciones anteriores llevan a concluir que los problemas científicos se encuentran vinculados a otro tipo de nociones por lo que esa tipología de problemas se asocia también con el problema didáctico de la proporcionalidad y con las relaciones funcionales elementales.

Desde este mismo enfoque, Sánchez (2013) desarrolla una investigación de intervención cuyo objetivo era determinar las técnicas y tecnologías empleadas por estudiantes de entre 11 y 14 años de edad, al enfrentarse a tareas de variación y cambio en situaciones de reparto proporcional, el trabajo muestra las técnicas y tecnologías derivadas de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad que son empleadas para dar respuesta a la situación de reparto. Entre las técnicas utilizadas por el alumnado se identificó el uso de una serie de conceptos y teoremas asociados con el análisis escalar y funcional y las propiedades de la función lineal. Las tecnologías que justificaban las técnicas de solución permitieron observar la relación para acudir al razonamiento por analogías, es decir identificar lo que ocurre con las cantidades de magnitud de una de las series para posteriormente trasladar ese patrón de comportamiento a las cantidades de magnitud.

En otro estudio de este mismo corte, Bosch (2006) plantea una propuesta para el problema de articulación de la matemática escolar con el estudio de las relaciones funcionales en la educación secundaria, de esta propuesta derivan algunas cuestiones relacionadas con el diseño de organizaciones didácticas para la articulación de las relaciones entre magnitudes asentadas en el currículo escolar con las áreas y sectores propias de cada etapa educativa, con ello se intentaba revisar las particularidades de una organización didáctica escolar que permitiera retomar contenidos antiguos sobre los sistemas de variación para su desarrollo e integración progresiva en organizaciones matemáticas de mayor complejidad. Para lograrlo se diseñó y experimentó un proceso

didáctico que permitiera realizar una actividad matemática que articulara el estudio de los sistemas de variación entre magnitudes. El desarrollo de la propuesta permitió entender por un lado la pertinencia de reformular la noción de modelización matemática en tanto herramienta de análisis didáctico, y por otro el hecho de constituir una solución al problema de desarticulación de las relaciones funcionales.

Por su parte, Vega (2021) indagó cómo llegan los saberes de la proporcionalidad a la clase de octavo grado, para dar respuesta a esta cuestión se enfocó en la revisión de un libro de texto donde encontró que el uso de tablas aparecía como la principal tarea para identificar la proporcionalidad, a tal grado que las y los alumnos los asociaban como sinónimos. De ahí, se desprendieron otro tipo de interrogantes relacionadas con el uso de tablas para la resolución de problemas, cuando éstos no se presentan bajo dicho formato, la posibilidad de desarrollar otros procedimientos además de las tablas y la interpretación de la constante cuando las magnitudes no se presentan en tablas de variación. La conclusión principal de Vega (2021) señala que las tareas con tablas hacen pensar en la proporcionalidad como un conjunto de prácticas relativas a la resolución de problemas donde sólo se aplican definiciones y propiedades establecidas previamente y que constituyen un dispositivo estable con elementos discursivos y simbólicos.

Los trabajos anteriores permiten identificar la situación actual de la TAD en el plano de la investigación, donde la mayoría de los estudios tienden al análisis praxeológico de la proporcionalidad en tanto saber matemático, ello indica también que la modelización de los sistemas de variación puede darse desde la Escuela Infantil cuando el alumnado reconstruye las praxeologías ligadas a los números y posteriormente transitarán al uso de praxeologías más complejas asociadas a la proporcionalidad.

3.2.2 Dispositivos de formación para la proporcionalidad

El avance en los estudios realizados desde la perspectiva de la TAD en los últimos años ha permitido progresivamente que se diseñen ciertos dispositivos didácticos denominados *Recorridos de Estudio e Investigación* (en adelante REI) que parten de una cuestión generatriz Q y cuyas respuestas conducen al análisis de preguntas derivadas como punto de partida del saber dentro de un sistema didáctico (Chevallard, 1999), sin embargo pocos han sido los estudios o informes sobre los resultados de su aplicación, que permitan establecer una visión amplia sobre la pertinencia de su diseño en el contexto de la proporcionalidad. Parra y Otero (2018) presentan algunos antecedentes y características de los REI desarrollados en los últimos años y muestran alrededor de 41 artículos publicados sobre el desarrollo de los REI, específicamente cuatro de ellos hacen una descripción teórica, de su vinculación con el aprendizaje colaborativo y la modelización, 14 corresponden a propuestas teóricas sin implementación mientras que 23 muestran el

diseño y puesta en práctica del REI en diversos niveles educativos, no obstante esta diversidad, se identifican escasos trabajos vinculados con el estudio de la proporcionalidad.

Al respecto, García (2005) indaga sobre la relación entre la proporcionalidad y las relaciones funcionales que se trabajan en la Educación Secundaria, el trabajo expone un proceso didáctico que se basa en la reconstrucción de un conjunto de praxeologías matemáticas con la que se busca la reconstrucción de las relaciones funcionales a través de sus verdaderas razones de ser, esto es el estudio de la variabilidad. Para tal efecto implementó un REI basado en un proceso de modelización sobre los sistemas de variación y propuso ubicarlos en un contexto de tipo económico-comercial: construcción de programas o simulación de planes de ahorro con diferentes tipos de variación en los que los alumnos tendrían que elegir el número de cuotas y la cuantía de los parámetros iniciales para calcular las cantidades acumuladas en cada plazo y alcanzar la cantidad final ahorrada.

El diseño y aplicación del REI partió de un conjunto articulado de tareas, iniciando con tareas de simulación sobre el dinero acumulado conforme avanzan los plazos, los resultados indicaron la puesta inicial de técnicas aritméticas limitadas, que al avanzar a las tareas de control precisaban la construcción de un modelo algebraico que dio paso a su manipulación y representación gráfica.

En años recientes Ruiz-Olarría et al. (2019) retomaron la investigación anterior y realizaron un estudio basado en los REI para la formación de profesores con el propósito de identificar cómo organizar la enseñanza de la modelización funcional elemental y qué papel se asigna a la proporcionalidad en esa organización, la propuesta fue aplicada en el Master oficial de formación del profesorado de secundaria. La estructura del REI consideró la existencia de cinco módulos: el primero, denominado M_0 enuncia ¿Cómo enseñar un contenido C ?, delimitando la cuestión generatriz Q_0FP a la que se daría respuesta con el dispositivo, así como el ámbito, la competencia o contenido, en este caso la proporcionalidad; el segundo módulo o M_1 Vivir un REI, donde los sujetos de estudio participaron como estudiantes-profesores para dar respuesta a la cuestión derivada de los planes de ahorro de secundaria propuesta por García (2005), el tercer módulo M_2 Analizar el REI vivido, donde se cuestiona y reflexiona sobre las praxeologías matemáticas construidas y la organización didáctica desarrollada, aunque el estudio consideró sólo estos tres momentos, los autores enuncian la integración de dos módulos más para la estructuración del dispositivo: M_3 Diseñar un REI y M_4 Gestionar y experimentar un REI. Los resultados del estudio mostraron un primer esbozo de un mapa provisional sobre una praxeología para la enseñanza de la proporcionalidad a través de caracterizaciones de los planes de ahorro y los modelos funcionales.

En los últimos años, se han presentado trabajos que recuperan el papel de la modelización matemática desde la TAD en tanto procesos de construcción de praxeologías de complejidad creciente y aunque no recuperan el análisis desde la proporcionalidad, constituyen un referente sobre la implementación de un REI en diversos niveles educativos.

Florensa, García y Sala (2020) presentan el análisis de tres REI implementados en diferentes niveles educativos para la enseñanza de la modelización matemática en Educación Infantil, Educación Secundaria y Universidad; el primero se enfoca a la exploración de una colección de gusanos de seda para la modelización de sistemas extra-matemáticos y el uso de herramientas matemáticas lógicas, numéricas, espaciales, geométricas y de medida. El segundo REI partió de una situación problemática sobre el descubrimiento de ruinas romanas con el propósito de poner en juego el uso de objetos geométricos en el contexto universitario, mientras que el tercero retomó la Teoría de la Elasticidad en un curso de Ingeniería Mecánica.

En los tres casos anteriores se observó que las condiciones derivadas de la sociedad y la escuela son favorables para la modelización, aunque también existen ciertos niveles de rigidez como el espacio, el tipo de asignaturas y el tiempo didáctico, que constituyen restricciones para la modelización y que aumentan en función del nivel educativo, en tanto que el nivel pedagógico y disciplinar implica ciertas modificaciones en niveles educativos superiores donde el saber a enseñar se muestra más estructurado y formalizado.

A decir de los estudios encontrados sobre las praxeologías y dispositivos de formación respecto a la proporcionalidad, es visible la presencia de trabajos que vuelven la mirada a este tópico bajo el análisis de la modelización matemática y la experimentación de un REI, sin embargo en la mayoría de los casos la tendencia observada es la sistematización bajo la perspectiva de propuestas teorizadas, con la dificultad para su implementación, sobre todo si se pretende la integración de los módulos de gestión y experimentación.

4. Conclusiones

Las investigaciones en el campo de la Didáctica de las Matemáticas se han diversificado en los últimos años lo que ha permitido la delimitación de algunas líneas de generación del conocimiento que se enfocan particularmente en los procesos de formación del profesorado, lo mismo se ha estudiado la formación inicial que las acciones para el desarrollo profesional de los profesores en servicio. Esta delimitación ha permitido la consideración de contenidos matemáticos específicos como objetos que precisan estudiarse para generar propuestas que permitan mejorar su enseñanza y aprendizaje. La evolución de estos estudios ha generado la estructuración de propuestas para identificar la naturaleza de los saberes que deben incluirse en el equipamiento conceptual que un profesor requiere para su acción en los espacios escolares.

Los trabajos identificados sobre la formación del profesorado en los que las acciones de formación se vinculan con la proporcionalidad se han posicionado en un lugar importante para comprender los fenómenos que ocurren en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, la revisión de investigaciones ubicadas tanto en el programa cognitivo como en el epistemológico han mostrado análisis mucho más finos sobre el objeto de estudio matemático (la proporcionalidad) y sobre los saberes didácticos necesarios para su

enseñanza efectiva. Los hallazgos encontrados revelan una tendencia de investigación orientada en su mayoría al análisis del conocimiento matemático del profesorado en el Programa Cognitivo y en menor medida a la revisión de praxeologías didácticas y experimentación de dispositivos de formación en el Programa Epistemológico.

En el caso del Programa Cognitivo, se ha podido observar una transición, los primeros estudios investigaban las concepciones, creencias y percepciones de las y los profesores, posteriormente se deslizaron hacia el análisis de los saberes del profesor desde una tipología de conocimientos más especializados, en la mayoría de los estudios revisados se afirma que una o un profesor requiere de un conocimiento específico vinculado entre otras cosas, a las especificidades de la enseñanza, lo que resulta fundamental para el diseño, organización e implementación de acciones didácticas para la formación, toda vez que el profesor requiere de una formación cognitiva sobre su objeto de enseñanza. Los estudios sobre los conocimientos del profesorado acerca de la proporcionalidad muestran que los profesores conocen el uso del valor constante, la regla de tres y las tablas de variación proporcional, porque también reconocen el texto del saber donde las actividades de enseñanza están correlacionadas con dichas nociones.

Por su parte, los estudios en el ámbito del Programa Epistemológico y el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico promueven el análisis de las organizaciones matemáticas y didácticas desde una perspectiva que privilegia la modelización algebraica, en este punto se observa el manejo de los sistemas de variación y las relaciones funcionales como principales cuestiones de indagación. En cuanto al análisis de dispositivos didácticos se observa la implementación de tareas, por lo general de carácter matemático, a partir de las cuales se revisan ciertas praxeologías en su resolución y justificación. Es de mencionar que las investigaciones encontradas sobre la puesta en práctica de Recorridos de Estudio e Investigación (REI), se focalizan principalmente en el análisis de los primeros momentos de experimentación, es decir donde el profesorado vive y analiza un REI como aprendiz de matemáticas, pocas veces se diseña, gestiona y experimenta este dispositivo como profesor en acto.

Finalmente, las investigaciones analizadas en este trabajo dan cuenta de las tendencias en los estudios sobre la proporcionalidad y la formación del profesorado y se constituyen como referentes básicos para comprender los fenómenos que ocurren en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Los trabajos encontrados muestran las dificultades de las y los profesores para la comprensión de la proporcionalidad en tanto objeto matemático y su relación con las nociones adyacentes, de igual forma se observa el uso de técnicas rudimentarias en la resolución de situaciones o tareas matemáticas centradas en contextos numéricos con bajos niveles de abstracción, situación que justifica la necesidad de promover acciones de formación basadas en un amplio sustento cognitivo y epistemológico.

Referencias

- Atriano, R. A., Benítez, A. y Ramírez L. V. (2013). *El reto de las escuelas formadoras de docentes en el Estado de México ante la reforma educativa*. Memorias del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa. COMIE. México.
- Balderas, R., Block, D. y Guerra, M. (2014). "Sé cómo se hace, pero no por qué". Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria. *Revista Educación Matemática*, 26(2), 7-32. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40532665002.pdf>
- Bolea, P., Bosch, M., y Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 21(3), 247-304. <https://revue-rdm.com/2001/la-transposicion-didactica-de/>.
- Bosch, M. (1995). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias (Matemáticas). Facultat de Ciències. Barcelona.
- Bosch, M., García, F. J., Gascón, J. y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), 37-74. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40558507003.pdf>
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Escudero, D. y Carrillo J. (2021). El Conocimiento Didáctico del Contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación matemática*, 32(2), 8-38. <https://doi.org/10.24844/EM3202.01>
- Florensa, I., García, F. J., y Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: Estudios de caso en distintos niveles educativos. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (17), 21-37. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.315>
- Fuentes, C. C. (2020). Aproximación al Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas Sobre Proporcionalidad: Un Estudio de Caso a Partir del Modelo MTSK. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(59), 33-63. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/73>
- García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* [Tesis de doctorado]. Universidad de Jaén.

- Gascón, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. *La gaceta de la RSME*, 5(3), 673-702.
- Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 14(2), 203-231. <https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v14n2/v14n2a4.pdf>
- Hernández, S. (2013). *Capital cultural en la formación inicial de la docencia en la Escuela Normal de Tlanepantla*. Memorias del XII Congreso Nacional de Investigación Educativa. COMIE. Guanajuato, México.
- Parra, V., y Otero, M. R. (2018). Antecedentes de los Recorridos de Estudio e Investigación (REI): características y génesis. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 13(2), 1-12. <https://doi.org/10.54343/reiec.v13i2.239>
- Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L. y Fernández, F. (2003) *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer*. Una empresa Docente, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
- Rivas, M. A., Godino, J. D. y Castro, W. F. (2012). Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. *Boletim de Educação Matemática*, 26(42), 559-588. <https://www.redalyc.org/pdf/2912/291223574008.pdf>
- Rivas, M., Rondón, Y., Burgos, M. (2019). Conocimiento sobre proporcionalidad de futuros profesores de matemática. Un estudio exploratorio. *Educere*, 23(76), 761-777. <https://www.redalyc.org/journal/356/35660459008/html/>
- Ruiz, L. y García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Relime*, 14(1), 41-70. <https://www.redalyc.org/pdf/335/33519067003.pdf>
- Ruiz, M. E. (2021). La proporcionalidad como noción disponible del docente. *Revista De Educación Matemática, Especial*, 1-12. <https://doi.org/10.33044/revem.10404>
- Ruiz-Ollarría, A., Bosch, M. y Gascón, J. (2019). Construcción de una praxeología para la enseñanza en la institución de formación del profesorado. *Educación Matemática*, 31(2), 132-160. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2448-80892019000200132
- Sánchez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: Una mirada desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 65-97. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33526417005>

- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2002). Plan de Estudios 1997. Licenciatura en Educación Primaria. Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académicos de las Escuelas Normales. México.
- Shulman, L. S. (1986). "Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: Una Perspectiva contemporánea" en M., Wittrock (comp.), *La investigación de la Enseñanza I*. Enfoques, teorías y métodos, 9-84. Paidós.
- Sureda, P. y Otero, M. R. (2010) Teoremas en acto y Praxeologías de los profesores de Matemáticas. *Revista de investigación*, 34 (71), 33-55. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1010-29142010000300003
- Torres, E., y Deulofeu, J. (2020). El conocimiento del profesor de matemáticas en la práctica: Enseñanza de la proporcionalidad. *REDIMAT*, 9(2), 147-171. <http://funes.uniandes.edu.co/23708/>
- Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria* [Tesis de doctorado]. Universidad de Granada.
- Valverde, G., Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M. J., González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, 523-531. SEIEM.
- Vega, B. (2021). La proporcionalidad en el análisis didáctico de un libro de texto. *Revista De Educación Matemática, Especial*, 1-13. <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10470/11155>