

Propuestas de energía y materia oscura en gravedad de Rastall

Mauro Alexis Cordero Félix, Antonio Pérez Cortés, Javier Fernando Chagoya Saldaña,
Julio César López Domínguez, Carlos Alberto Ortiz González.

Universidad Autónoma de Zacatecas, Unidad Académica de Física,
Calzada Solidaridad esquina con Paseo a La Bufa s/n CP 98060

mauroalexis.cordero@fisica.uaz.edu.mx

Resumen: En este trabajo se estudia una teoría de gravedad modificada, la llamada teoría de Rastall y, se exploran consecuencias físicas que pudieran ser contrastadas con datos observacionales. Esta teoría se puede llevar mediante un mapeo a una gravedad de Einstein con un tensor de energía-momento modificado. Se analiza un modelo cosmológico con métrica de Friedmann y contenido de materia del universo compuesto por materia oscura y energía oscura. Se calcula el factor de escala, los parámetros de densidad y el parámetro de Hubble del modelo.

Palabras clave: Gravedad de Rastall, materia oscura, energía oscura.

Abstract: In this work we study a modified gravity theory, the so-called Rastall theory and, we explore the physical consequences that can be tested with observational data. This theory can be mapped to an Einstein gravity with a modified Energy-momentum tensor. We analyze a cosmological model with Friedmann metric which is filled with dark matter and dark energy. We compute the scale factor, density parameters and the Hubble parameter of the model.

Keywords: Cosmology, Rastall gravity.

1. Introducción

Desde su publicación en 1915 la Teoría de la Relatividad General de Einstein ha sido puesta a prueba de manera sistemática, utilizando las observaciones y los datos astrofísicos. Las primeras pruebas a las que fue sometida la teoría de la Relatividad General de Einstein consistieron en contrastar las predicciones de la teoría con las observaciones astrofísicas de la desviación de los rayos de luz por una fuente gravitacional y el avance del perihelio de la trayectoria elíptica de Mercurio alrededor del Sol [1].

En tiempos recientes se han realizado detecciones y observaciones de objetos predichos por la Relatividad General que durante muchos años parecían ser solo curiosidades matemáticas que la teoría padecía, estos objetos son las ondas gravitacionales y los agujeros negros [2, 3]. Esta teoría también ha sido utilizada para modelar el universo en el que vivimos, este modelo es llamado el Modelo Cosmológico Estándar, basado en el Principio Cosmológico el cual establece que el Universo a grandes escalas es homogéneo e isotrópico. Este modelo es consistente con la mayoría de las observaciones cosmológicas, sin embargo, necesita que el Universo contenga un tipo de materia que solo interactúa gravitacionalmente, llamada materia oscura, y de una energía que permea todo el universo y que provoca una aceleración del universo, llamada energía oscura. La materia y energía oscura son hoy en día dos de las grandes incógnitas de la física moderna, ya que desconocemos su naturaleza, solamente observamos cual es su efecto en el universo [4, 5].

Esto nos hace pensar que, tal vez, la Teoría de la Relatividad General de Einstein no es la teoría que describa la interacción gravitacional a todas las escalas, es decir, que hay otras teorías que

describen la interacción gravitacional donde la Relatividad General tiene problemas y que contienen a esta última en algún límite. Siguiendo esta serie de ideas, estas teorías nos explicarán la naturaleza de las componentes “oscureas” del Universo o tal vez no sean necesario incluirlas para describir al Universo. En los últimos años los físicos que se dedican al área de gravitación han propuesto una gran cantidad de teorías y modelos que modifican la teoría de la gravedad de Einstein o que la contienen en un límite. Algunas han logrado cierto éxito, sin embargo, no se han logrado consolidar por presentar inconsistencias matemáticas u observacionales. A pesar de esto, nos han mostrado nuevos caminos que pueden explorarse con la finalidad de tener un mejor entendimiento de las teorías y de la naturaleza del Universo y de la interacción gravitacional.

En este trabajo se presentan una propuesta de gravedad modificada la llamada teoría de Rastall [6]. Esta teoría tiene un parámetro libre y en un límite se recupera la gravedad de Einstein. Una de las características importantes de esta teoría es que en sus ecuaciones de campo se tiene un tensor de energía-momento el cual no se conserva. En este trabajo se propone un modelo cosmológico con métrica de Friedmann plana (que está de acorde con las observaciones cosmológicas) [4] y con un contenido de materia oscura y energía oscura (las componentes de materia y energía que dominan actualmente al universo) en la gravedad de Rastall y se mapea a la gravedad de Einstein, donde calculamos el factor de escala, el parámetro de Hubble y los parámetros de densidad. Además, se propone que los dos tipos de componentes del universo interactúen entre ellos, lo cual hace que el modelo sea más general que lo que se usualmente se reporta.

2. Marco teórico

La Relatividad General de Einstein o gravedad de Einstein y la gravedad de Rastall están escritas en forma tensorial [7, 8], por lo que las componentes de los tensores se denotan por letras con subíndices griegos. Las ecuaciones de la gravedad de Rastall son

$$G_{\mu\nu} + \kappa\lambda g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1)$$

donde

$$\kappa = \frac{4\eta-1}{6\eta-1}\kappa_G, \quad \lambda = \frac{\eta(6\eta-1)}{(4\eta-1)\kappa_G}, \quad \kappa_G = 8\pi G, \quad \eta = \kappa\lambda \quad (2)$$

$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ es el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de curvatura, λ es un parámetro libre que caracteriza a la teoría de Rastall, $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio-tiempo, R es el escalar de curvatura, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento y G es la constante de gravitación de Newton, los índices $\mu = \nu = 0, 1, 2, 3$. La Ec. (1) es en general 10 ecuaciones diferenciales parciales, no lineales, no homogéneas y acopladas. Estas se pueden resolver analíticamente y se puede reducir en número si consideramos modelos con alta simetría.

En la descripción del universo mediante una teoría de gravedad se utiliza el Principio Cosmológico, el cual establece que el Universo es homogéneo e isotrópico a grandes escalas. Una de las métricas que son compatibles con este principio es la llamada métrica de Friedmann. Esta métrica considera 3 posibles curvaturas para la parte espacial del universo: plana, positiva o negativa. Las observaciones cosmológicas recientes nos dicen que la curvatura espacial de universo es plana. Además de una métrica necesitamos introducir el contenido de materia y energía del Universo a través del tensor de energía-momento y modelamos este contenido de materia como un fluido perfecto. En nuestro modelo consideraremos que el contenido del universo es materia oscura (sin presión) y una densidad de energía constante ρ_Λ , con presión P_Λ , que representa a la energía oscura,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)] \quad (3)$$

donde la función $a(t)$ es llamada el factor de escala y nos dice la razón de expansión del universo, es decir, para una función $a(t)$ creciente, significa que el universo se está expandiendo. Con esta métrica podemos calcular el tensor de Einstein, el escalar de curvatura los cuales sustituimos en las ecuaciones de campo de la gravedad de Rastall, Ec. (1), y usando las componentes del tensor de energía-momento para el fluido perfecto, obtenemos las ecuaciones [9,10]

$$(12\eta - 3)H^2 + 6\eta\dot{H} = \frac{4\eta-1}{1-6\eta}\kappa_G(\rho_m + \rho_\Lambda) \quad (4)$$

$$(12\eta - 3)H^2 + (6\eta - 2)\dot{H} = \frac{4\eta-1}{6\eta-1}\kappa_G P_\Lambda \quad (5)$$

donde $H = \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble. Estas son dos ecuaciones y 4 cantidades a determinar, el factor de escala $a(t)$, las densidades ρ_m y ρ_Λ , y la presión P_Λ . Es necesario introducir otras ecuaciones linealmente independientes a las que obtenemos de las ecuaciones de Einstein. Una de ellas es la ecuación de continuidad para el fluido perfecto

$$\left(\frac{3\eta-1}{4\eta-1}\right)\dot{\rho} + \left(\frac{3\eta}{4\eta-1}\right)\dot{P} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (6)$$

la cual es válida para cada una de las componentes del universo, la materia oscura y la energía oscura. Otra ecuación independiente es la ecuación de estado para un fluido perfecto, que es una relación entre la densidad de energía y la presión

$$P = \omega\rho \quad (7)$$

De nuevo, esta ecuación es válida para las dos componentes del Universo y donde $\omega = \eta/(3\eta - 1)$ es un parámetro que caracteriza a cada tipo de componente. Al sustituir la Ec. (7) en la Ec. (6) obtenemos una relación entre la densidad de energía ρ y el factor de escala a . En el caso particular de la materia oscura (presión nula) obtenemos la Ec. (8).

$$\left(\frac{3\eta-1}{4\eta-1}\right)\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0 \quad (8)$$

la cual es una ecuación separable que podemos resolver y obtener

$$\rho_m(t) = C_1 a^{\frac{3(1-4\eta)}{3\eta-1}} \quad (9)$$

donde C_1 es una constante de integración.

3. Metodología

Para encontrar el factor de escala, las densidades y la presión en función del tiempo necesitamos resolver el conjunto de ecuaciones. Para lograr esto procedemos de la siguiente manera. Primero, de las Ecs. (4) y (5) podemos eliminar \dot{H} y obtener la Ec. (10).

$$\frac{(4\eta-1)[3(6\eta H^2-1)+\kappa(\rho_\Lambda+\rho_m-3\eta\rho_m)]}{3\eta(6\eta-1)} = 0 \quad (10)$$

la cual resolvemos para ρ_m y sustituimos en la Ec. (5) y así obtener una ecuación para $H(t)$

$$\frac{\kappa(4\eta-1)\rho_\Lambda}{6\eta-1} + 3(4\eta - 1)H^2 + (6\eta - 2)\dot{H} = 0 \quad (11)$$

que tiene como solución

$$H(t) = \sqrt{\frac{\kappa\rho_\Lambda}{3(6\eta-1)}} \tan \left[\frac{\sqrt{3\kappa\rho_\Lambda(6\eta-1)}}{(18\eta^2-9\eta+1)} \left(\frac{1-4\eta}{2}\right) t \right] \quad (12)$$

y de la relación entre el parámetro de Hubble y el factor de escala $H(t) = \dot{a}/a$, encontramos el factor de escala

$$a(t) = \left[\cos \left(\frac{\sqrt{3\kappa\rho_\Lambda(1-4\eta)}}{2(1-3\eta)\sqrt{6\eta-1}} t \right) \right]^{\frac{2(1-3\eta)\sqrt{6\eta-1}}{(1-3\eta)\sqrt{3(18\eta-3)}}}. \quad (13)$$

Una de las cantidades que son medidas en las observaciones astrofísicas y cosmológicas es el corrimiento z que, para un universo en expansión, es un corrimiento al rojo. La relación entre el factor de escala y el parámetro z es

$$a(z) = \frac{1}{1+z}. \quad (14)$$

Al sustituir las Ecs. (14) y (9) en la Ec. (10), obtenemos el parámetro de Hubble H en términos del parámetro de corrimiento z .

$$H^2(z) = \frac{c_1 \kappa (3\eta - 1) \left(\frac{1}{1+z}\right)^{\frac{3(1-4\eta)}{3\eta-1}} - \kappa \rho_\Lambda}{3(6\eta - 1)}. \quad (15)$$

Por otro lado, para que un universo sea con curvatura espacial plana es necesario que tenga una densidad de energía crítica

$$\rho_c = \frac{3(6\eta - 1)}{\kappa(3\eta - 1)} H^2 \quad (16)$$

la cual, al ser evaluada en el tiempo cosmológico actual t_0 (presente) y despejando el parámetro de Hubble H evaluado en t_0

$$H^2(t_0) = H_0^2 = \frac{\kappa(3\eta - 1)}{3(6\eta - 1)} \rho_c(t_0). \quad (17)$$

Además, al evaluar la Ec. (10) en t_0 obtenemos

$$H_0^2 = -\frac{\kappa(\rho_\Lambda + (1-3\eta)\rho_m)}{3(6\eta - 1)} \rho_c(t_0). \quad (18)$$

Haciendo el cociente entre la las Ecs. (17) y (18) encontramos relación

$$\frac{\rho_\Lambda}{(1-3\eta)\rho_c} + \frac{\rho_m}{\rho_c} = 1. \quad (19)$$

Una cantidad que es de gran ayuda en el análisis de los modelos cosmológicos en las distintas teorías es el parámetro de densidad $\Omega = \rho/\rho_c$, que de acorde a las observaciones actuales para la materia oscura $\Omega_m(t_0) = 0.3$ y para la energía oscura $\Omega_\Lambda(t_0) = 0.7$. Utilizando esta relación obtenemos el valor de la contante de integración de la Ec. (9)

$$C_1 = -\frac{3\rho_\Lambda}{7(3\eta - 1)}. \quad (20)$$

Al sustituir las Ecs. (9) y (14) en la Ec. (19), obtenemos los parámetros de densidad para la materia oscura y energía oscura en términos del parámetro de corrimiento al rojo z

$$\Omega_m = \frac{c_1(3\eta - 1) \left(\frac{1}{1+z}\right)^{\frac{3}{3\eta-1}}}{\rho_\Lambda \left(\frac{1}{1+z}\right)^{\frac{12}{3\eta-1}} - c_1(3\eta - 1) \left(\frac{1}{1+z}\right)^{\frac{3}{3\eta-1}}} \quad (21)$$

y

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda \left(\frac{1}{1+z}\right)^{\frac{12\eta}{3\eta-1}}}{\rho_\Lambda \left(\frac{1}{1+z}\right)^{\frac{12}{3\eta-1}} - c_1(3\eta - 1) \left(\frac{1}{1+z}\right)^{\frac{3}{3\eta-1}}}. \quad (22)$$

3.1 Materia interactuante

La ecuación de continuidad Ec. (6) es válida para cada componente del universo, que en este modelo son la materia oscura y la energía oscura. Sin embargo, se puede proponer una interacción entre estas componentes del universo mediante la Ec. (6) al igualarla a una función que como propuesta inicial es proporcional a la densidad de energía oscura en la teoría de Rastall

$$Q^E = C\rho_\Lambda^R \quad (23)$$

donde los superíndices E y R denotan la teoría donde se definen, Einstein (E) o Rastall (R). Utilizando esta notación, el mapeo entre el tensor de energía-momento de ambas teorías está dado por la Ec. (23).

Gráfica de $a(t)$ vs t

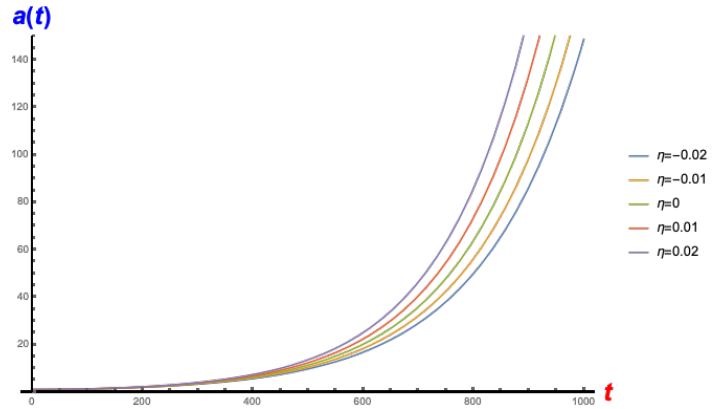


Fig. 1. En esta figura se grafica el factor de escala $a(t)$ en función del tiempo cosmológico t , para diversos valores del parámetro η .

$$T_{\mu\nu}^E = T_{\mu\nu}^R - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) g_{\mu\nu} T^R \quad (23)$$

donde $T^R = T^\mu{}_\mu{}^R = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^R$ es la traza del tensor de energía-momento en la teoría de Rastall.

4. Resultados

En esta sección presentaremos los resultados relevantes de este trabajo. Primero presentaremos la gráfica del factor de escala, de la Ec. (13), $a(t)$ vs el tiempo t , para diferentes valores del parámetro η , ver la Fig. 1. En todos los casos tenemos un universo que se expandirá para siempre “Big Chill”, solamente la razón de expansión difiere para cada uno de los valores del parámetro η .

Otra gráfica que obtenemos de la Ec. (15) es la del parámetro de Hubble $H(z)/H_0(1+z)$ vs z es la de la Fig. 2. En la gráfica se observa que después de $z = 1$ el comportamiento del parámetro de Hubble para todos los valores del parámetro η se aproxima a una línea recta. Para $0 < z < 1$ el comportamiento necesita un análisis más profundo.

En la Fig. 3 se muestra la gráfica de los parámetros de densidad de la materia oscura Ω_m y energía oscura Ω_Λ vs el parámetro de corrimiento al rojo z para 3 distintos valores del parámetro η . Para un universo inicialmente dominado por materia oscura y poca cantidad de energía oscura, $\Omega_m > \Omega_\Lambda$, la grafica nos muestra que al expandirse el universo la materia oscura decrece y la energía oscura domina para etapas tardías del universo $\Omega_m < \Omega_\Lambda$.

Además, como parte de los resultados, se obtuvieron expresiones analíticas, de la forma

$$\rho_\Lambda^R = A(\kappa, \lambda, \omega) \rho_\Lambda^E \quad (24)$$

para la densidad de energía oscura en la teoría de Rastall en términos de la densidad de energía oscura en la teoría de Einstein y de los parámetros κ , λ y ω . Esto representa un mapeo entre las cantidades en ambas teorías.

Una propuesta que se presenta en este trabajo es que las dos componentes del universo interactúan de alguna forma. La forma en que se modela esta interacción puede ser diversa, para este trabajo utilizamos una de la forma:

Gráfica de $H(z)/H_0(1+z)$ vs z

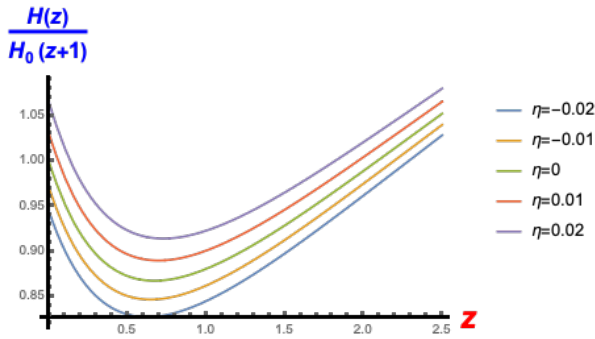


Fig. 2. En esta figura se grafica el factor de escala $H(z)/H_0(1+z)$ vs z para distintos valores del parámetro η .

Gráfica de Ω_Λ y Ω_m vs z , para valores de $\eta = -0.5, 0, 0.5$

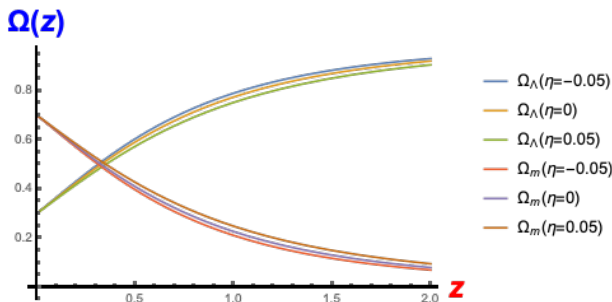


Fig. 3. En esta figura se presenta la gráfica de los parámetros de densidad de materia oscura y energía oscura vs el corrimiento para 3 distintos valores del parámetro η .

$$Q^E = A(\kappa, \lambda, \omega) \rho_\Lambda^E \quad (25)$$

que para la materia oscura nos provee de la siguiente relación

$$P_m^E = \frac{\kappa\lambda}{4\kappa\lambda - 1} \rho_m^R. \quad (26)$$

Recordemos que, la materia oscura se modela como un fluido perfecto sin presión, es decir $P_m = 0$. Si introducimos a la teoría de Rastall un fluido con estas propiedades, al realizar el mapeo a la teoría de gravedad de Einstein obtenemos una expresión para la presión de la materia oscura no nula, es decir, obtenemos que la presión de la materia oscura en la teoría de gravedad de Einstein es distinta de cero. Este es un resultado importante, que puede explorarse más a fondo en trabajos futuros, ya que nos permite proponer contenidos de materia usuales en la teoría de Rastall y al realizar el correspondiente mapeo a la teoría de la gravedad de Einstein podemos analizar las propiedades de la materia en la teoría de Einstein.

5. Conclusiones

En este trabajo se estudia la teoría de gravedad modificada de Rastall mediante el uso de un modelo cosmológico particular, el de Friedmann, e incluimos dos tipos de componentes al Universo, materia oscura y energía oscura modeladas mediante un fluido perfecto y las cuales pueden interactuar.

Esta teoría depende del parámetro η , el cual mide que tanto se desvía la teoría de Rastall de teoría de la gravedad de Einstein. En el límite cuando $\eta \rightarrow 0$, la teoría de Rastall y la teoría de Einstein son la misma. Este parámetro es adimensional y toma valores reales de tal manera que las cantidades físicas que dependen de el están bien definidas.

Encontramos el factor de escala para este modelo cosmológico, Ec. (13) y su gráfica se presenta en la figura 1. La gráfica se muestra para distintos valores del parámetro η y en todas ellas se muestra un universo en expansión para todo tiempo, este tipo de universos son llamados universos “Big Chill”, ya que estarán en expansión por siempre, causando un enfriamiento del Universo y la disociación completa de toda materia. Para valores positivos del parámetro η el factor de escala crece más rápido que para valores negativos del mismo parámetro η , esto nos hace concluir que el parámetro η juega un papel importante en la descripción de la expansión del Universo y podría ser ajustado utilizando datos de observaciones cosmológicas.

En la Fig. 2 se muestra la gráfica del parámetro de Hubble $H(z)/H_0(1+z)$ vs el corrimiento z . Los datos de las observaciones de las galaxias nos dicen que todas las galaxias se alejan de nosotros como observadores (debido a la expansión del Universo) obedeciendo una ley llamada la Ley de Hubble. Esta ley establece que la velocidad a la que se alejan las galaxias de nosotros es proporcional a la distancia a la que están, más alejada una galaxia de nosotros a mayor velocidad se aleja, $v = H_0 d$, donde la constante de proporcionalidad H_0 es la constante de Hubble, o el parámetro de Hubble al tiempo actual t_0 . En el análisis que podemos hacer inicialmente de esta gráfica podemos decir que, así como en el factor de escala, el parámetro η hace que el parámetro de Hubble varíe en su comportamiento al graficarlo contra el corrimiento. A futuro podemos realizar ajustes con los datos observacionales que se tienen de los catálogos de galaxias y se puede hacer un análisis más profundo acerca de la forma que tienen las graficas.

En la Fig. 3 se presenta la gráfica de los parámetros de densidad de la materia oscura y de la energía oscura, en términos del corrimiento y para distintos valores del parámetro $\eta = -0.5, 0, 0.5$. Las gráficas muestran que, dada un parámetro de densidad inicial (al inicio del Universo) para la materia oscura y para el parámetro de densidad para la energía oscura, el parámetro de densidad de la materia oscura disminuye conforme el universo se expande, es decir, la materia oscura se diluye conforme transcurre el tiempo como lo haría la densidad de materia usual que conocemos, al incrementar el volumen que la contiene. La densidad de energía oscura incrementa al expandirse el Universo y termina dominando la dinámica del universo para tiempos tardíos del Universo. Este tipo de comportamiento del parámetro de densidad de energía oscura hace que el universo tenga una etapa de aceleración, la cual para nuestro universo es observada. La gráfica también muestra que en algún momento de la expansión del universo la materia oscura y la energía oscura contribuyeron de igual manera a la expansión del universo, esto se puede observar de la intersección de las graficas alrededor de $z = 0.35$.

Las expresiones analíticas encontradas para la presión en la gravedad de Einstein para un fluido sin presión en la gravedad de

Rastall, nos hacen pensar que es posible realizar distintas propuestas ya conocidas en la gravedad de Rastall y obtener resultados nuevos en la teoría de Einstein. Desde el punto de vista teórico es muy interesante este tipo de relaciones, ya que nos permite mapear tipos de materia ya analizadas en la literatura a nuevos tipos de materia en la teoría de Einstein y utilizarlas para modelar el contenido de materia y energía del universo y analizar si están de acorde o no con los datos de las observaciones astrofísicas y cosmológicas.

6. Agradecimientos

Los participantes de este proyecto agradecen a la Unidad Académica de Física, a la Universidad Autónoma de Zacatecas, al CONACyT, al PRODEP y a los proyectos UAZ-2019-38818, UAZ-2018-37554 y UAZ-2019-37970.

Referencias

- [1] Weinberg S., “Cosmology”, Ed. Oxford University Press, 2da. edición, 2008.
- [2] Abbot, B. P., *et al*, “*Observation of gravitational waves*”, Phys. Rev. Lett., 2016, Vol. 116, 061102.
- [3] The event horizon Telescope Collaboration, “*First M87 event horizon telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole*”, Astroph. J. Lett., 2019, 875, 1-17.
- [4] Ryden B. S., “Introduction to cosmology”, Ed. Addison-Wesley, 1ra. edición, 2002.
- [5] Liddle A., “An introduction to modern cosmology”, Ed. Cambridge University Press, 3ra. edición, 2015.
- [6] Rastall P., Generalization of Einstein Theory, Phys. Rev. D, 1972, Vol. 6, pp. 3357-3359.
- [7] D’Inverno R., “Introduction Einstein’s Relativity”, Ed. Clarendon Press, 1ra. edición, 1992.
- [8] Carrol S. M., “Spacetime and geometry”, Ed. Clarendon Press, 2da. edición, 2019.
- [9] Ghaffari S., Mamon A. A., Moradpour H. y Ziaie A., *Holographic dark energy in Rastall theory*, Mod. Phys. Lett. A 35, 2020, Vol. 33, pp. 2050276.
- [10] Visser M., *Rastall theory is equivalent to Einstein theory*, Phys. Lett. B, 2017, Vol. 782, pp. 83-86.