Investigación CIENTÍFICA
Vol. 14, No. 2 (2020)

Jornadas de Investigación UAZ – 2020

Deflexión de la luz bajo teorías de gravedad modificada

Oscar López Aguayo, Javier Fernando Chagoya Saldaña,
Julio Cesar López Domínguez, Carlos Alberto Ortiz González

Universidad Autónoma de Zacatecas, Unidad Académica de Física,
Calzada Solidaridad s/n Col Hidráulica, Zacatecas, Zac., CP 98068

oscar.lopez@fisica.uaz.edu.mx

Resumen: Se presenta una herramienta que permite aprobar o descartar teorías de gravedad modificada de forma eficiente y sistemática. Se analizan algunas propuestas de teoría de gravedad modificada en base a una expansión post-Newtoniana, lo cual es comparando con cálculos observacionales del ángulo de la desviación de la luz debido a campos gravitacionales. Específicamente, se calcula el ángulo de deflexión de la luz en base a una expansión post-Newtoniana y se compara con propuestas de gravedad modificada de Proca y Horndeski.

***Palabras clave*:** Gravitación, post-Newtoniano, gravedad modificada.

***Abstract**:* We present a systematic approach to approve or discard modified theories of gravity in an efficient way. We analyze the post-newtonian approximation of some theories of modified gravity, and contrast them to light bending observations due to gravitational fields. Specifically, we calculate light bending angles based on a post-Newtonian approximation, and compare to the Proca and Hordenski theories of modify gravity.

***Keywords**:* Gravitation, post-Newtonian, modify gravity.

1. Introducción

La teoría de la Relatividad General (RG) [1], propuesta por Albert Eintein a coimenzo del siglo pasado, revolucionó la física contemporánea. Su éxito se atribuye al poder predictivo que demostró, al explicar las anomalías de las órbitas de los planetas, la desviación de la luz, la contracción y dilatación del espacio-tiempo y la predicción de ondas gravitacionales entre otros.

En el contexto cosmológico, el modelo más aceptado es ΛCDM, el cual está basado en la teoría de Relatividad General. Sin embargo, dicho modelo presenta diferentes problemas que no han podido ser explicados por la teoría; el problema de la constante cosmológica, la falta de evidencia experimental en la materia oscura y energía oscura han motivado la búsqueda de nuevos modelos cosmológicos, los cuales, en su mayoría toman como base la acción de Hilbert-Einstein [2], y realizan cambios ya sea en la parte geométrica, en la parte de materia o ambas.

Con el fin de discriminar la validez de nuevas propuestas, se propone realizar una aproximación post-Newtoniana [3-4] (límite de campo débil) en diferentes modelos de gravedad modificada; esto permite comparar los parámetros caracteristicos de cada teoría con los parametros post-Newtonianos (PPN) [5] que se asemejan a observaciones realizadas a escalas del sistema solar.

En específico, trataremos con la métrica de dos teorías, la de Hordenski [6-7] (teoría tenso-escalar) restringida a una métrica asintóticamente plana y la teoría de Proca [8] (teoría tenso-vectorial); las anteriores serán contrastadas con los parámetros post-Newtonianos derivados de las observaciones de la desviación de la luz.

2. Marco teórico

En la presente sección se presentan las herramientas matemáticas y físicas para hacer el desarrollo. En primer lugar se presenta el formalismo de la Parametrización Post-Newtoniana (PPN) y posteriormente se presenta la teoría de lentes gravitacionales.

2.1 Formalismo post-newtoniano

Las ecuaciones de Einstein no siempre tienen soluciones analíticas y el tomar consideraciones de independependencia temporal e isotropía en los sistemas facilita una solución exacta con la que se pueden dar las primeras correcciones propuestas por la RG; por esta razón es que resulta factible modelar el sistema solar mediante una métrica de espacio-tiempo que además de ser esféricamente simétrica, cumple con ser estática. El adaptar los PPN al desarrollo matemático de la RG provee parámetros que se pueden ajustar a diversas teorías gravitacionales para comparar la teoría a los datos que se arrojan en mediciones. Las consideraciones de PPN son en base a sistemas como en el que se encuentra nuestro planeta, cumplen con tener movimientos lentos en su dinámica y los campos gravitacionales son débiles en comparación con los que generan cuerpos masivos. Considerando un sistema de partículas que cumple con las cacarteristicas mencionadas, tomamos la notación M, r y υ para los valores típicos de masas, separación y velocidad de dichas partículas; la física Newtoniana [9] nos dice que la energía cinética corresponde al mismo orden de un potencial Newtoniano,

$$v^2 \sim \frac{GM}{r} \tag{1}$$

La aproximación post-Newtoniana toma en cuenta los términos en órdenes superiores a los propuestos por la mecánica Newtoniana, por lo que nos podemos referir a ella de una forma más sencilla como una expansión de potencias en los términos referidos a la velocidad de las partículas, v. Dicha expansión debe afectar directamente en las ecuaciones de movimiento para las partículas de prueba que se están modelando. Partiendo de la ecuación general [10],

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\xi}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\xi}{d\tau} = 0. \tag{2}$$

de tal forma que la aceleración queda como:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{00} - 2\Gamma^i_{0j}\frac{dx^j}{d\tau} - \Gamma^i_{jk}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}$$

$$+\left[\Gamma^0_{00} + 2\Gamma^0_{0j}\frac{dx^j}{d\tau} + \Gamma^0_{jk}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\right]\frac{dx^i}{d\tau}. \tag{3}$$

El límite Newtoniano se recupera al considerar que las velocidades son lo suficientemente pequeñas para mantener los términos de la expresión Ec.(3) de orden uno y despreciar los que corresponden a velocidades de orden mayor, lo que resulta:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cong -\Gamma^i_{00} \cong \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}, \tag{4}$$

dando la equivalencia con el orden GM/r^2 o v^2/r. La idea de utilizar PPN es la de calcular el término d^2x/dt^2, a orden v^4/r para incluir el siguiente orden de la expansión.

El siguiente cálculo es determinar los valores correspondientes al orden requerido en la ecuación

$$\begin{aligned} &\Gamma^i_{00} \ a\ orden\ \frac{v^4}{r}; \qquad \Gamma^i_{0j} \ a\ orden\ \frac{v^3}{r};\\ &\Gamma^i_{jk} \ a\ orden\ \frac{v^2}{r}; \qquad \Gamma^0_{00} \ a\ orden\ \frac{v^3}{r};\\ &\Gamma^0_{0j} \ a\ orden\ \frac{v^2}{r}; \qquad \Gamma^0_{jk} \ a\ orden\ \frac{v}{r}. \end{aligned} \tag{5}$$

Desde el punto de vista del tensor métrico, se puede encontrar un sistema de coordenadas de tal forma que se aproxime al tensor métrico de un espacio plano, es decir $\eta_{\mu\nu}$ de Minkowski. La expansión en potencias de la velocidad nos da una idea en la que a las componentes corresponderían

$$g_{00} = -1 + g^{(2)}_{00} + g^{(4)}_{00} + \cdots,$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + g^{(2)}_{ij} + g^{(4)}_{ij} + \cdots,$$

$$g_{i0} = g^{(3)}_{i0} + g^{(5)}_{i0} + \cdots. \tag{6}$$

Con el fin de ser consistentes con las simetrías de las ecuaciones de campo de Einstein, las componentes con dependencia temporal de la expansión deben ser impares, para cumplir con la transformación de inversión temporal, $t \to -t$.

Las derivadas espaciales y temporales están relacionadas con las cantidades de distancia y velocidad, como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \sim \frac{1}{r}, \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{v}{r}. \tag{7.2}$$

Con lo anterior y dada la forma expícita de los símbolos de Christoffel,

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left[\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\lambda\rho}}\right]. \tag{8}$$

Tomando en cuenta el orden requerido para cada término Ec.(5), llevando a cabo una expansión y sustituyendo en Ec.(2), llegamos a la forma expícita de los términos requeridos:

$$\left(\Gamma^i_{00}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\right)^2, \tag{9.1}$$

$$\left(\Gamma^i_{00}\right)^4 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\right)^4 + \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(g_{ij}\right)^2\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j}\right)^2, \tag{9.2}$$

$$\left(\Gamma^i_{0j}\right)^3 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j}\right)^3 + \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i}\right)^3\right], \tag{9.3}$$

$$\left(\Gamma^i_{jk}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)^2 - \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)^2\right], \tag{9.4}$$

$$\left(\Gamma^0_{00}\right)^3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial t}\right)^2, \tag{9.5}$$

$$\left(\Gamma^0_{0i}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\right)^2, \tag{9.6}$$

$$\left(\Gamma^0_{ij}\right)^1 = 0. \tag{9.7}$$

Hasta este punto se ha presentado este formalismo de una manera muy general en la que no se ha especificado algún tipo de tensor métrico. Para los propósitos de este trabajo nos centraremos en métricas bajo simetría esférica, esto con el fin de abordar posteriormente la deflexión de la luz que provocan objetos con esta característica de simetría. Al escribir las componentes desarrolladas con el formalismo post-Newtoniano, se lleva la métrica a una forma equivalente donde entran en consideración parámetros de ajuste que sirven en la comparación de datos experimentales con cualquier teoría. Esto quiere decir, que al considerar una métrica general con correcciones PPN en conjunto con alguna teoría de gravitación en específico, se puede determinar por comparación el valor de dichos parámetros y así utilizar este formalismo como herramienta para analizar la validez de alguna propuesta diferente a RG en base con los valores establecidos de PPN que dictan las observaciones.

En las secciones siguientes se trabaja con métricas que incluyen de uno a dos PPN relacionados con correcciones a la RG como lo es la curvatura por unidad de masa en reposo γ y la no linealidad en la superposición de la gravedad β. Se especifican los valores límite para regresar a la teoría de RG y se presenta posteriormente como influyen estos PPN en el cálculo de la deflexión de la luz [11-12].

3. Metodología

En la presente sección se desarrollará la aproximación post-Newtoniana a una métrica con simetría esférica, y se presenta ángulo de deflexión a primer y segundo orden de la expansión.

El formalismo post-Newtoniano ofrece una métrica que se adapta a diferentes teorías según los valores que se asignen a los parámetros que se manejan y el uso de estos parámetros describe el límite post-Newtoniano de teorías de gravedad. Restringiendo el análisis a un sistema cuasiestático, con simetría esférica, nos lleva a una métrica en coordenadas de Schwarzschild [10], dada por la siguiente ecuación:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + 2(\beta-\gamma)\left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2\gamma GM}{c^2 r} + \Phi\left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2\right)dr^2 + r^2 d\Omega^2 + \cdots \quad (10)$$

A partir de la métrica anterior, se calcula la desviación de la luz. Donde Φ, es una combinacion lineal de γ y β, propia del sistema coordenado. Fijando el sistema en un plano $\theta = \pi/2$, el cálculo de la desviación de la luz a segundo orden de la expansión queda dado por:

$$\alpha = \frac{GM}{c^2 b^2}[2b(\gamma+1)] + \frac{GM}{c^2 b^2}\left[\frac{GM\pi}{4c^2}(8 - 4\beta + 8\gamma + \gamma^2\Phi - \gamma^2)\right]. \quad (11)$$

Al considerar el caso particular $\beta = \gamma = 1$, $\Phi = 4$, y despreciando los términos de segundo orden, se obtiene el mismo resultado [10] que se deduce de RG.

La aproximación PPN a segundo orden se obtiene de suprimir el tercer término de la parte radial del elemento de línea Ec.(10). La relación del ángulo de deflexión de la luz a primer orden [2] queda dado por:

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right). \quad (12)$$

El anterior resultado es uno no menos importante que el de segundo orden, ya que dependiendo de las métricas que se pretendan acotar o comparar, será la relación que será requerida, ya que existen teorías que solo son compatibles a primer orden.

4. Resultados

A continuación, se presentan dos teorías de gravedad modificada, las cuales serán analizadas bajo una comparación con los términos correspondientes de observaciones de PPN. Lo anterior permitirá acotar el modelo y/o sus parámetros.

4.1 Deflexión de la luz bajo PPN: Teoría de Horndeski

La primera teoría de gravitación propuesta por Isaac Newton [6] está dada por medio de una fuerza gravitacional dependiente de las masas en interacción y la distancia que las separa, dicha fuerza es consecuencia de un campo de potencial escalar, por lo que se clasifica como una teoría escalar. En este caso a cada punto del espacio se le asigna una magnitud y la distribución de dichos valores escalares esta dada por el potencial gravitacional que está en función de la distancia.

Por otro lado, la propuesta de Einstein es de otra naturaleza, se unifica el espacio-tiempo y su curvatura causada por la presencia de un cuerpo genera la interacción gravitacional, asimilando el fenómeno como una consecuencia geométrica del espacio-tiempo. Dicho en palabras más precisas, las trayectorias de las partículas se ven afectadas por la curvatura del espacio-tiempo y la presencia de objetos masivos en una región afecta notoriamente dicha curvatura. La RG está escrita como campo tensorial, no escalar. En principio las ecuaciones de movimiento de Einstein pueden ser obtenidas mediante una densidad lagrangiana a través de la acción de Einstein-Hilbert, por lo que las teorías tensor-escalares como lo es la propuesta de Horndeski, abordan modificaciones a la gravedad a partir de densidades lagrangianas.

Para las teorías tensor-escalares, Horndeski [3] propone la forma más general bajo la acción:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5), \quad (12)$$

donde las densidades lagrangianas están dadas por:

$$\mathcal{L}_2 = G_2, \quad (13.1)$$
$$\mathcal{L}_3 = -G_3\phi, \quad (13.2)$$
$$\mathcal{L}_4 = G_4 R + G_4\left[(\phi)^2 - \left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\right)^2\right], \quad (13.3)$$
$$\mathcal{L}_5 = G_5 G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi + \frac{G_{5X}}{6}[F(\phi)], \quad (13.4)$$
$$F(\phi) = (\Box\phi)^3 - 3\phi\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\right)^2 - 2\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\right)^3, \quad (13.5)$$

la métrica esta dada por, $g_{\mu\nu}$; su determinante, g; R es el escalar de Ricci y $G_{\mu\nu}$ el tensor de Einstein. Las funciones $G_i = G_i(\phi, X)$ dependen únicamente del campo escalar, ϕ, y la energía cinética, $X = -\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi/2$, donde el subíndice X de Ec.(13.4), se refiere a la derivada con respecto a dicha variable.

Restringiendo los valores para las funciones G_i, para las cuales se obtienen métricas asintóticamente planas,

$$G_2 = \eta X, \quad (14.1)$$

$$G_4 = \zeta + \lambda\sqrt{-X}, \quad (14.2)$$

$$G_3 = G_5 = 0, \quad (14.3)$$

donde η y λ son parámetros adimensionales, y $\zeta = 1/2\kappa$ es la parte correspondiente a la acción de Hilbert-Einstein de la que se obtiene la RG y el término G_2 representa la parte cinética. Sin detallar demasiado en esta parte, se obtiene una solución estática y esféricamente simétrica cuya forma de la métrica es:

$$\mathrm{ds}^2 = -\left(1 - \frac{\mu}{r} - \frac{\lambda^2}{2\zeta\eta r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{\mu}{r} - \frac{\lambda^2}{2\zeta\eta r^2}\right)dr^2$$
$$+r^2 d\Omega^2 + \cdots. \quad (15)$$

Con el fin de hacer un estudio bajo el formalismo PPN, comparamos los componentes del elemento de línea de de la métrica anterior con los elementos de la métrica Ec.(10). Para la parte temporal tenemos:

$$\left[1 - \frac{\mu}{r} - \frac{\lambda^2}{2\zeta\eta r^2}\right] = \left[1 - \frac{2GM}{c^2 r} + 2(\beta - \gamma)\left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2\right]. \quad (16)$$

por lo que se concluye que,

$$\beta = \gamma - \frac{\lambda^2}{4G^2M^2\zeta\eta} \ . \quad (17)$$

Comparando las componentes radiales

$$\left[1 - \frac{\mu}{r} - \frac{\lambda^2}{2\zeta\eta r^2}\right] = \left[1 + \frac{2\gamma GM}{c^2 r} + \Phi\left(\frac{GM}{c^2 r}\right)^2\right], \quad (18)$$

considerando $\mu = -2GM$,

$$\gamma = 1, \quad (19)$$

lo que permite determinar que

$$\beta = 1 - \frac{\lambda^2}{4G^2M^2\zeta\eta}, \quad (20)$$

dadas las anteriores condiciones, los términos dependientes de $\frac{1}{r^2}$, tienen que satisfacer la siguiente ecuación cuadrática para λ ,

$$-\lambda^2 + 2G^2M^2\zeta\eta(\Phi - 4) = 0, \quad (21)$$

donde se despeja el parámetro Φ; que al analizar la Ec. (21) bajo la condición de $\Phi = 4$, comprobamos que el elemento de línea Ec.(15) regresa a la forma del elemento de línea de Schwarzschild de RG; debido a que en este caso $\lambda = 0$. Al determinar Φ, podemos finalmente determinar el ángulo de deflexión que presenta la teoría de Horndeski en su solución Ec.(15). Utilizando la ecuación del ángulo de deflexión a segundo orden del formalismo PPN Ec.(11),

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b} + \frac{30\pi GM^2}{8b^2c^2} + \frac{3\pi\lambda^2}{8b^2c^2G\zeta\eta}, \quad (22)$$

donde el primer término es el ángulo de deflexión obtenido de RG, el segundo es la corrección resultante de la expansión a segundo orden que aún pertenece a RG y por último tenemos el término dependiente del parámetro λ, que pertenece a las correcciones de esta extensión a la RG Ec.(15). Cabe mencionar que estos resultados son exclusivos de la solución a la teoría de Horndeski que estamos considerando, debido a que los de PPN toman valores específicos para cada solución. Esto quiere decir que aunque los resultados puedan ser satisfactorios en este análisis, en la actualidad la teoría no es considerada una de las más viables en este formalismo, debido a que con la medición de las ondas gravitacionales se han descartado ciertos sectores de la misma, pero es un inicio para la derivación de teorías tensor-escalares aún más generales conocidas como teorías ”Beyond Horndeski” [13].

4.2 Deflexión de la luz bajo PPN: Teoría de Proca

En este caso se estudian soluciones exactas de agujero negro estáticas y esféricamente simétricas provenientes de lagrangianos concretos planteados en teorías Proca [8,14] que cumplen con el teorema de unicidad de “no-hair” [15], que se refiere a la forma que tienen las métricas relacionadas con estos objetos de interés, es decir que las métricas de agujero negro asintóticamente planas y estáticas pueden ser descritas en términos de tres parámetros: la masa, carga eléctrica y momento angular. La teoría de Proca está descrita por:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(F + \sum_{i=2}^{6} \mathcal{L}_i\right), \quad (23)$$

donde $\mathcal{L}_i$, son análogos a las Ecs.(13.1-13-5), pero para campos vectoriales. Partiendo del elemento de línea de una solución exacta que representa un agujero negro [16], tenemos:

$$\mathrm{ds}^2 = -\left[\frac{\left(P + \frac{Q}{R}\right)^2}{2X_c} - \frac{C}{r^4}\right]dt^2 + \left[\frac{\left(P + \frac{Q}{R}\right)^2}{2X_c} - \frac{C}{r^4}\right]^{-1} dr^2$$
$$+r^2 d\Omega^2, \quad (24)$$

donde P, Q y C son constantes las cuales cumplen con la relación, $P^2 = 2X_c$, para que Ec.(24) cumpla con la condición de ser asintoticamente plana; condición requerida para comparar con métrica de formalismo PPN.

Para determinar los valores PPN de la presente teoría, comparamos los elementos de la métrica con la del presente modelo. Para la componente temporal se cumple la siguiente relación:

$$\left[\frac{\left(P+\frac{Q}{R}\right)^2}{2X_c}-\frac{C}{r^4}\right]=\left[1-\frac{2GM}{c^2r}+2(\beta-\gamma)\left(\frac{GM}{c^2r}\right)^2\right]. \quad (25)$$

Al comparar de forma separada los términos equivalentes entre componentes correspondientes con dependencia r^{-2} y r^{-1}, se desprenden las siguientes igualdades:

$$\beta = 1-\frac{Q^2}{4G^2M^2X_c}, \quad (26)$$

$$X_c = \frac{Q^2}{4G^2M^2}. \quad (27)$$

La parte radial nos permite completar el sistema de ecuaciones requeridas para determinar los parámetros PPN relacionados con la presente teoría tenso-vectorial, así que comparando los términos dependientes como r^{-1}, en:

$$\left[\frac{\left(P+\frac{Q}{R}\right)^2}{2X_c}-\frac{C}{r^4}\right]=\left[1+\frac{2\gamma GM}{c^2r}+\Phi\left(\frac{GM\gamma}{c^2r}\right)^2\right], \quad (28)$$

se determina la equivalencia,

$$\gamma = \frac{Q}{GM\sqrt{2X_c}}. \quad (29)$$

De los términos dependientes de r^{-2}, se obtiene,

$$Q = -\frac{G^2M^2\gamma^2\Phi\sqrt{X_c}}{\sqrt{2}}, \quad (30)$$

Las relaciones anteriores se satisfacen cuando:

$$\gamma = 1, \quad (31)$$

$$\beta = \frac{1}{2}. \quad (32)$$

Otra solución exacta a la teoría tenso-vectorial de Proca, con un campo masivo está dada por el elemento de línea,

$$\mathrm{ds}^2 = -\left(1-\frac{M}{r}\right)^2 dt^2+\left(1-\frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2+r^2d\Omega^2, \quad (33)$$

al comparar las componentes del los elemento de línea de Proca con la del formalismo PPN se llega a la estimación de los parámetros post-Newtonianos:

$$\gamma = 1, \quad (34)$$

$$\beta = \frac{3}{2}. \quad (35)$$

5. Análisis de Resultados

A continuación se abordará la comparación de los resultados obtenidos para γ y β con los valores PPN obtenidos experimentalmente.

En base a observaciones realizadas con respecto a los efectos que tiene el Sol sobre la desviación de la luz y retraso temporal de la misma, se han determinado valores para los PPN mencionados. En un experimento publicado [17], se obtiene lo que es hasta el día de hoy el valor más preciso para el parámetro γ. Por medio de mediciones realizadas con apoyo de la sonda Cassini, lanzada en el año de 1997, que se mantuvo proporcionando datos hasta antes de su desintegración en el año de 2017. El experimento realizado en 2003 determina que:

$$\gamma = 1+(2.1\pm 2.3)\times 10^{-5}. \quad (36)$$

Por otro lado, un experimento basado en un láser apuntado hacia reflectores situados en la Luna [18] (proyecto Apollo 11), centrado en analizar el efecto Nordtvedt, determinó un límite estrecho en el valor del parámetro β. Al analizar dicho efecto sobre el sistema de dos cuerpos, se obtuvo indirectamente que:

$$\beta = 1+(0.3\pm 1.3)\times 10^{-4}. \quad (37)$$

Estas observaciones descartan los valores PPN que corresponden al formalismo de Proca; a escalas del sistema solar, las métricas Ec.(24) y Ec.(33) no modelan la física conocida. En el caso de los resultados obtenidos para la teoría de Horndeski podemos realizar un análisis más amplio debido al parámetro libre λ en sus PPN y el ángulo de deflexión Ec.(22), es decir, que puede ser ajustado dicho parámetro a las observaciones. Para esto nos basaremos en los resultados obtenidos en un experimento [19] que constó de medir el ángulo de deflexión de la luz causado por la presencia del Sol en nuestro sistema solar. Por medio de Geodetic Very Long Baseline Interferometry se realizaron mediciones en la desviación de ondas de radio provenientes de fuentes de objetos situados atrás de nuestro Sol, obteniendo un ángulo de deflexión de:

$$\alpha = 0.3100'' \pm 0.0009''. \quad (38)$$

Utilizando el valor de su incertidumbre para restringir los valores posibles del tercer término de la ecuación (22), referente a la corrección propuesta por la teoría de Horndeski. Haciendo un reescalamiento, $\lambda = \zeta\delta$, se llega a la siguiente relación:

$$\left|\frac{3\pi\zeta\delta^2}{8b^2c^2G\eta}\right| \leq 0.0009''. \quad (39)$$

donde el parámetro de impacto b, será considerado en un rango entre uno y dos veces el radio solar $R_{\odot}$, y los valores $\eta = 1$ y $\zeta = 1/2\kappa$, son tomados de la teoría de Horndeski. El rango de validez para δ con el parámetro de impacto $b = R_{\odot}$ corresponde a:

$$-9.1 \times 10^{-3} \leq \delta \leq 9.1 \times 10^{-3}. \quad (40)$$

Para el parámetro de impacto, $b = 2R_{\odot}$, se tiene:

$$-1.8 \times 10^{-2} \leq \delta \leq 1.8 \times 10^{-2}. \quad (41)$$

Este último resultado nos dice que el modelo de Horndeski Ec. (15), es física y matemáticamente correcto, siempre y cuando δ esté dentro de los rangos establecidos Ec.(40) y Ec. (41). Es físicamente correcto que el rango de δ incremente conforme el parámetro de impacto b se aleja de la fuente gravitacional ocasionando que la corrección de la teoría tenga menor presencia, reduciendo la capacidad para acotar δ. Con este tipo de análisis matemático se nos permite revisar los rangos de validez para cualquier solución de agujero negro que se presente en teorías de gravedad modificada.

6. Conclusiones

El formalismo post-Newtoniano es una herramienta útil para tratar las propuestas que surgen a partir de la necesidad de modificar la teoría de la Relatividad General aportando constricciones de parámetros comparables con observaciones de experimentos basados en las pruebas clásicas que la RG tuvo que superar. Este tratamiento que se ha restringido a soluciones de agujero negro bajo la condición de ser asintóticamente plano ha resultado en que pueden ser tratadas desde un límite de campo débil en el que las mediciones de nuestro sistema solar pueden servir como apoyo en conjunto con los PPN para restringir o limitar la validez de nuevas teorías, de lo que concluimos:

- Dada una basta cantidad de propuestas para extender la comprensión teórica de la gravedad en base a las problemáticas que se presentan para la RG, pueden ser tratadas desde un límite de campo débil en el que las mediciones de nuestro sistema solar pueden servir como apoyo en conjunto con los PPN para restringir o limitar la validez de nuevas teorías.
- Las dos soluciones provenientes del formalismo vector-tensorial de Proca que se manejaron en este trabajo no cuentan con valores de PPN que estén dentro del rango de validez que se da a partir de los experimentos y por lo tanto son descartadas.
- Las teorías que vienen a partir del formalismo de Horndeski pueden presentar valores aceptables de PPN debido a los parámetros libres que la teoría presenta y pueden ser ajustados a las observaciones.
- El extender el formalismo de PPN a órdenes mayores proporciona parámetros ajenos al desarrollo de este trabajo que pueden ser analizados de la misma manera y en conjunto proporcionarían una prueba más contundente para validar o descartar teorías alternas de gravedad.

7. Reconocimientos

Trabajo realizado bajo los proyectos de investigación: UAZ-2018-37554, UAZ-2019-37818, UAZ-2019-37970.

Referencias

[1] Hartle, J. B. (James B.) Gravity: an introduction to Einstein's general relativity. American Journal of Physics Vol. 71(10), 2003.

[2] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", New York: John Wiley and Sons (1972).

[3] Will, Clifford M. (1971). "Theoretical Frameworks for Testing Relativistic Gravity. II. Parametrized Post-Newtonian Hydrodynamics, and the Nordtvedt Effect". *The Astrophysical Journal*. IOP Publishing. **163**: 611-628

[4] Eddington, A. S. (1922) The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge University Press.

[5] Caldwell, Robert Reynolds, Asantha Cooray and Alessandro Melchiorri. "Constraints on a New Post-General Relativity Cosmological Parameter." (2007).

[6] Horndeski, Gregory Walter (1974-09-01). "Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space". International Journal of Theoretical Physics. **10** (6): 363–384.

[7] Clifton, Timothy; Ferreira, Pedro G.; Padilla, Antonio; Skordis, Constantinos (March 2012). "Modified Gravity and Cosmology". *Physics Reports*. **513** (1–3): 1–189.

[8] L.~Heisenberg, Generalization of the Proca Action, JCAP 05(2014), 015.

[9] Mysterium cosmographicum, Johannes Kepler, edición del 1596, 181.

[10] R. d'Inverno, Introducing Einstein's relativity, Oxford, UK: Clarendon (1992).

[11] Adie o. Petters, Harold Levine, Ioachim Wambsganss, Singularity Theory and Gravitational Lensing. Birkhituser Boston in 2001

[12] Kochanek, Christopher S., "The Saas Fee Lectures on Strong Gravitational Lensing." (2004). astro-ph/0407232.

[13] Kobayashi, Tsutomu, *Horndeski theory and beyond: a review.* Reports on Progress in Physics. Vol.82(05) 2019

[14] J. Chagoya, G. Niz and G. Tasinato, Class. Quant. Grav. 33, no. 17, 175007 (2016) [arXiv:1602.08697 [hep-th]].

[15] W. Israel, "Event horizons in static vacuum space-times," Phys. Rev. 164, 1776–1779 (1967).

[16] HeisenbergLavinia, Kase Ryotaro. Minamitsuji, Masato Tsujikawa, Shinji. Black holes in vector-tensor theories. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 04(27) 2017.

[17] Bertotti, B., et al. A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. Nature, vol. 425, no. 6956, 2003, p.

[18] Hofmann, F.,Müller, J., Biskupek, L. Lunar laser ranging test of the Nordtvedt parameter and a possible variation in the gravitational constant. Astronomy & Astrophysics - (2010). 522. 10.1051/0004-6361/201015659.

[19] S. B. Lambert, C. Le Poncin-Lafitte, Determination of the relativistic parameter gamma using very long baseline interferometry, Astron. Astrophys. 499 (2009), 331.