

# Configuraciones auto-gravitantes de un campo vectorial masivo

Alejandro Silva García, Javier Fernando Chagoya Saldaña,  
Julio César López Domínguez, Carlos Alberto Ortiz González

Universidad Autónoma de Zacatecas, Unidad Académica de Física,  
Calzada Solidaridad esq. Paseo de La Bufa s/n, Zacatecas, Zac., CP 98060

[alejandro.silva@fisica.uaz.edu.mx](mailto:alejandro.silva@fisica.uaz.edu.mx)

**Resumen:** La teorías de campos vectoriales con interacciones diferentes a las que describen el campo electromagnético de Maxwell han sido estudiadas en la literatura con motivaciones diversas, tales como la búsqueda de modificaciones no-lineales a la teoría electromagnética o de efectos gravitacionales que pudieran resolver parcialmente el problema de la materia oscura. En este trabajo se estudia una de esas teorías, contenida específicamente dentro de la categoría de Teorías Generalizadas de Proca. En esta teoría, se asume que el campo vectorial es masivo, y además que su dinámica es afectada por auto-interacciones de derivadas. Se encuentran soluciones que describen estrellas formadas únicamente por el campo vectorial, se analizan sus propiedades macroscópicas y se identifican las posibles signaturas observacionales de dichos objetos.

**Palabras clave:** Gravedad Modificada, Estrellas de bosones, Gravitación.

**Abstract:** Theories of vector fields including interactions that differ from those of the Maxwell field have been studied in the literature with diverse motivations, such as looking for non-linear modifications of electromagnetic theory, or looking for gravitational effects that can partially solve the problem of dark matter. In this work, one of these theories is studied, specifically within the class of Generalized Proca Theories, where it is assumed that the vector field is massive and its dynamics is subject to derivative self-interactions. Solutions describing stars formed only by the vector field are found, their macroscopic properties are analyzed, and their possible observational signatures are pointed out.

**Keywords:** Modified Gravity, Boson Stars, Gravitation.

## 1. Introducción

La Relatividad General (RG) es la mejor descripción que tenemos de la interacción gravitacional, gobernando la expansión del universo, el comportamiento de agujeros negros y la formación de las estructuras del universo, desde planetas y estrellas hasta cúmulos y super-cúmulos de galaxias. Sin embargo, para que la teoría logre describir esos fenómenos, es necesario considerar que la composición del universo incluye en sector de energía y materia oscura, elementos cuya existencia no se ha comprobado por observaciones directas sino que se infiere solo por efectos gravitacionales. La materia oscura es necesaria, entre otras cosas, para explicar las curvas de rotación de galaxias, mientras que la energía oscura se requiere para modelar la expansión acelerada del universo, observada por primera vez en 1929 por Edwin Hubble [1]. El modelo particular que considera estos ingredientes dentro de la RG es conocido como  $\Lambda$ CDM:  $\Lambda$  denota a la *constante cosmológica*, utilizada para modelar la energía oscura, mientras que CDM denota *materia oscura fría*, es decir, materia no relativista descrita como un fluido perfecto. Además, se asume que el universo es isótropo y homogénea a grandes escalas. Este modelo es también conocido como el *modelo cosmológico estándar*, y es altamente compatible con observaciones. Sin embargo, esto no significa que el mecanismo que causa la

expansión acelerada del universo esté entendido. El valor estimado con base en las observaciones recientes para la constante cosmológica es  $\Lambda \sim 10^{-52} \text{m}^{-2}$ , en unidades del Sistema Internacional. Este valor supone un gran problema, ya que la predicción dada por la teoría cuántica de campos para la constante cosmológica difiere por 120 órdenes de magnitud [2-3].

El problema de la constante cosmológica ha motivado la formulación de gran cantidad de teorías alternativas de gravedad. Algunos modelos estudian la generalización de la gravedad al introducir grados de libertad adicionales a la teoría. Por ejemplo, se puede considerar la teoría de Horndeski, [4-5], una teoría tenso-escalar que utiliza un grado de libertad escalar para tratar de explicar la aceleración tardía del universo. La teoría de Horndeski incluye como casos particulares a un gran número de teorías tenso-escalares que han sido ampliamente estudiadas en la literatura como alternativas al modelo cosmológico estándar. Por otra parte, se puede considerar también la adición de un campo vectorial. Esta idea llevó recientemente al desarrollo de la teoría generalizada de Proca, en la cual la expansión acelerada del universo es generada por un campo vectorial masivo acoplado no-mínimamente a la gravedad [6]. Se ha mostrado que la teoría de Proca generalizada admite soluciones astrofísicas relevantes, tales como agujeros negros y estrellas de neutrones [7-8].

Otro problema arraigado en el modelo  $\Lambda$ CDM es que la naturaleza de la materia oscura, que comprende el 26% del contenido del universo, es aún desconocida. Entre las teorías sobre el origen de la materia oscura se encuentran las partículas bosónicas [9]. En [10] se presenta un modelo en el que la materia oscura se compone de partículas bosónicas autointeractuantes ultraligeras que forman un condensado de Bose-Einstein. En este sentido las configuraciones tipo *estrellas de bosones*, estructuras compuestas por campos escalares acopladas mínimamente a gravedad y estabilizadas por efecto de su auto-gravitación, han sido estudiadas como candidatos de componentes de materia oscura [11]. Este tipo de configuraciones han modelado con éxito la presencia de materia oscura en galaxias, reproduciendo la curva de rotación observada en galaxias espirales [10, 12].

Además del papel que podrían tomar como materia oscura, las estrellas de bosones también pueden utilizarse como emuladores de agujeros negros o como representaciones de otros objetos astrofísicos [13-14], entre otras aplicaciones [15-17].

Por otro lado, se ha sugerido que las partículas masivas de spin-1 podrían incorporarse como elementos de la materia oscura [18]. Richard Brito y sus colaboradores han mostrado que estas partículas masivas, descritas por un campo vectorial en la teoría de Proca-Einstein, pueden formar estructuras auto gravitantes a las que se les conoce como *estrellas de Proca* [19]. En dicho trabajo se muestra que estos objetos poseen propiedades físicas análogas a aquellas de las estrellas de bosones. Esta similitud sugiere que, al igual que las estrellas de bosones, las estrellas de Proca pueden desempeñar un papel relevante como fuentes de materia oscura o en la formación de estructuras astrofísicas.

El objetivo de este trabajo es encontrar soluciones auto-gravitantes (tipo estrellas de bosones) en un modelo derivado de las generalizaciones de la acción de Proca, donde un campo vectorial masivo (complejo) se acopla no mínimamente a la curvatura. Para esto, se derivan las ecuaciones de movimiento de dicho modelo y se buscan soluciones para configuraciones estáticas, con simetría esférica, mediante un estudio numérico que nos permite identificar las soluciones que satisfacen las condiciones de frontera adecuadas para estrellas de bosones.

## 2. Marco Teórico

Entre 1936 y 1941, Alexandru Proca extendió la teoría de Maxwell en el contexto de la teoría cuántica de campos mediante la acción  $S_{Proca} = \int dx^4 \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mu^2 A_\mu A^\mu \right]$ , donde  $A^\mu$  es un campo vectorial de masa  $\mu$  y  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Esta acción describe un campo masivo de espín 1 en el espacio-tiempo de Minkowski, de forma que propaga  $2s + 1$  grados de libertad, es decir, tres grados de libertad físicos. La componente temporal del campo vectorial no se propaga debido a que no aparecen términos de velocidades de esta componente, de forma que el momento canónico conjugado asociado a dicha componente. En [6], Lavinia Heisenberg construye una generalización de esta acción incluyendo auto-interacciones de derivadas del campo vectorial, pero de forma tal que se siguen propagando sólo tres

grados de libertad. Por otra parte, en [19], se construyen soluciones auto-gravitantes a la teoría de Proca. Veamos a grandes rasgos el procedimiento de [19], que es muy similar al procedimiento estándar para obtener configuraciones de estrellas de bosones.

### 2.1 Estrellas de Proca

La acción que da lugar a estas estrellas es la acción de Proca mínimamente acoplada a la gravedad, y permitiendo que el vector  $A^\mu$  sea complejo,

$$S_{PS} = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mu^2 A_\mu \bar{A}^\mu \right], \quad (1)$$

donde la barra superior indica la conjugación de una cantidad compleja,  $G$  es la constante gravitacional de Newton,  $g$  es el determinante de la métrica del espacio-tiempo,  $g_{\mu\nu}$ , y  $R$  es el escalar de curvatura de Ricci asociado a dicha métrica. El tomar cantidades complejas es necesario para lograr que los campos dependan del tiempo y a la vez sean compatibles con un espacio-tiempo estático. La dependencia temporal es importante pues permite evadir teoremas sobre la no-existencia de configuraciones auto-gravitantes [20].

La variación de la acción dada en Ec. (1) respecto a la métrica y respecto al campo vectorial conduce a las ecuaciones de movimiento del sistema,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \mu^2 A^\nu, \quad (3)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein y  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momento del campo vectorial,

$$T_{\mu\nu} = -F_{\alpha(\mu} \bar{F}_{\nu)}^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \bar{F}^{\alpha\beta} + \mu^2 \left[ A_{(\mu} \bar{A}_{\nu)} - \frac{1}{2} A_\alpha \bar{A}^\alpha \right]. \quad (4)$$

En la ecuación anterior, los paréntesis alrededor de subíndices indican simetrización. Es importante notar que Ec. (3) implica que la divergencia covariante del vector  $A^\mu$  es nula, es decir, la condición de Lorentz se satisface. Además, el campo vectorial tiene una simetría  $U(1)$  que implica la existencia de una corriente y una carga conservada, esto es fundamental para la existencia de soluciones auto-gravitantes.

Ya que se tienen las ecuaciones de movimiento, es necesario hacer algunas suposiciones sobre los campos involucrados. Para la métrica, asumimos que es estática y esféricamente simétrica, por lo que el elemento de línea se puede escribir en la forma

$$ds^2 = -\sigma^2(r) N(r) dt^2 + \frac{dr^2}{N(r)} + r^2 d\Omega_2, \quad (5)$$

donde  $\sigma$  y  $N$  son funciones reales de la coordenada radial  $r$ , y  $d\Omega_2$  es el elemento de área de una esfera 2-dimensional. Por otra parte, el campo vectorial se escribe como

$$[A]_{\mu} = (\exp(-i\omega t) f(r), \quad (6)$$

$$i \exp(-i\omega t) g(r), 0, 0).$$

Como se mencionó anteriormente, la dependencia temporal y la naturaleza compleja del campo vectorial son compatibles con un tensor de energía-momento real y estático. Sustituyendo las expresiones anteriores en las ecuaciones de movimiento, Ecs. (2,3), se encuentran ecuaciones para  $\sigma(r)$ ,  $N(r)$ ,  $f(r)$  y  $g(r)$ . Dichas ecuaciones no se han podido resolver analíticamente, por lo que se procede a buscar soluciones numéricas. Sin embargo, antes de eso es conveniente encontrar aproximaciones analíticas en ciertos límites, específicamente en  $r \rightarrow \infty$  y en  $r \rightarrow 0$ . En el primer caso se verifica que asintóticamente la métrica es plana y los componentes del campo vectorial decaen exponencialmente. En el segundo caso se encuentran los perfiles de las soluciones para la métrica y el campo vectorial cerca del origen, esto permite verificar que no ocurren divergencias o discontinuidades, y además provee las condiciones iniciales que se utilizan para buscar soluciones válidas para cualquier  $r$ . Las soluciones resultantes se reproducen en la sección 4, con el propósito de comparar con los resultados obtenidos en el modelo generalizado que se considera en este artículo.

### 3. Metodología

Se buscan soluciones para métricas estáticas, esféricamente simétricas en presencia de un campo vectorial complejo y oscilatorio en el tiempo, dentro del modelo dado por

$$S_{GP} = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{4} F^2 + \frac{1}{2} m^2 A^2 + \beta G_{\mu\nu} A^{\mu} \bar{A}^{\nu} \right] \quad (7)$$

donde  $F^2 = F_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu}$  y  $A^2 = A_{\mu} \bar{A}^{\mu}$ .

Las ecuaciones de movimiento se obtienen al variar esta acción con respecto del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  y con respecto del campo vectorial  $A_{\mu\nu}$ . La derivación de estas ecuaciones de campo se vuelve complicada y por ello es más conveniente el uso de paquetes computacionales para su obtención. En este caso, se utilizó la paquetería *xAct* [21] para *Mathematica*, obteniendo así las ecuaciones de movimiento en forma covariante. Ya que se tienen estas ecuaciones, se introducen ciertas suposiciones sobre la forma de los campos involucrados.

Para encontrar soluciones auto-gravitantes se asume que la forma de la métrica y del campo vectorial es aquella de las ecuaciones (5) y (6), respectivamente. Con esto ahora es posible escribir las ecuaciones de campo que definen la dinámica del sistema en términos de las funciones de la métrica. Estas ecuaciones se resuelven numéricamente. Pero antes de ello, se estudia analíticamente el comportamiento de las soluciones cerca del origen, esto es útil para establecer las condiciones iniciales adecuadas para las soluciones numéricas. El análisis del comportamiento de estas ecuaciones de movimiento cerca del

origen muestra que las funciones de la métrica y del campo vectorial exhiben la siguiente forma:

$$f(r) = f_0 + r^2 \left( \frac{f_0(\mu^2 \sigma_0^2 - \omega^2)}{6\sigma_0^2} + \frac{4\pi G f_0^2 (\mu^2 \sigma_0^2 - 2\omega^2) \beta}{6\sigma_0^2} \right) + O(r^4), \quad (8)$$

$$g(r) = r \left( -\frac{\omega f_0}{6\sigma_0^2} - \frac{16\pi G \omega \beta f_0^3}{6\sigma_0^2} \right) + O(r^4), \quad (9)$$

$$m(r) = r^3 \left( \frac{2G\pi\mu^2 f_0^2}{3\sigma_0^2} + \frac{8\pi G f_0^2 (\omega^2 + 6\pi G \mu^2 f_0^2) \beta}{6\sigma_0^2} \right) + O(r^4) \quad (10)$$

$$\sigma(r) = \sigma_0 + r^2 \left( \frac{2\pi G \mu^2 f_0^2}{\sigma_0} + \frac{8\pi G f_0^2 (4\omega^2 + 24\pi G \mu^2 f_0^2 - 3\mu^2 \sigma_0^2) \beta}{9\sigma_0^3} \right) + O(r^4), \quad (11)$$

donde  $f_0$  y  $\sigma_0$  son constantes y son los valores de  $f(r)$  y  $\sigma(r)$  en el origen, respectivamente, y  $O(r^4)$  indica términos de orden mayor o igual que  $r^4$ . La función  $m(r)$  se conoce como función de masa, pues su valor asintótico se puede identificar con la masa total de la configuración si el espacio-tiempo es asintóticamente plano, y se define como  $N(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}$ .

Note que las soluciones dependen de las condiciones iniciales  $f_0$  y  $\sigma_0$ , y además de los parámetros  $\mu$ ,  $\omega$  y  $\beta$ . Vale la pena resaltar que las correcciones a la función de masa debidas a los términos generalizados de Proca comienzan al orden más bajo en  $r$ . El parámetro  $f_0$  es relevante no solo en el campo vectorial sino también en las funciones métricas.

Ya que se ha estudiado el comportamiento de las soluciones cerca del origen, se continúa con la construcción de las soluciones numéricas, esto se describe en la siguiente sección a la par de los resultados.

### 4. Resultados

Se buscaron soluciones del sistema de ecuaciones derivado de la acción dada por Ec. (7), con condiciones iniciales dadas por las Ecs. (8), (9), (10) y (11), impuestas en un radio inicial pequeño,  $r = r_i$ . Las condiciones iniciales en  $r_i$  quedan en términos de  $f_0$ ,  $\sigma_0$ ,  $\mu$ ,  $\omega$  y  $\beta$ . Para respetar las condiciones asintóticas necesarias (métrica plana y campo vectorial nulo), se han considerado únicamente las soluciones en las que la componente radial de la métrica es asintóticamente  $g_{rr} = 1$  y la componente temporal es asintóticamente constante (esta constante se puede reescalar después utilizando la invariancia de la teoría bajo reparametrizaciones temporales, de modo que también cumpla  $g_{tt} = 1$ ), y además las componentes del campo vectorial se

desvanecen en infinito,  $f(r \rightarrow \infty) = g(r \rightarrow \infty) = 0$ . Esto garantiza que las soluciones corresponden a configuraciones localizadas y aisladas. Además, en el origen  $r = 0$  el espacio-tiempo debe ser no-singular. En el presente caso, el comportamiento cerca del origen muestra que  $m(0) = 0$ , de forma que siempre se tiene  $g_{rr}(r \rightarrow 0) = 1$ .

Por otra parte, el valor de la componente radial de la métrica  $g_{rr}$  para distancias grandes se utiliza para determinar la masa gravitacional total, medida asintóticamente según la relación

$$M = \frac{r}{2} \left( 1 - \frac{1}{g_{rr}(r)} \right). \quad (12)$$

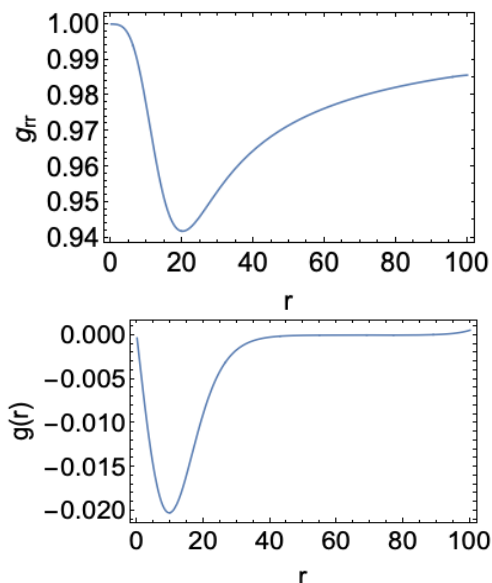
El hecho de que la métrica es asintóticamente plana en vez de exactamente plana permite extraer la información de la masa a partir de  $g_{rr}$  en el límite  $r \rightarrow \infty$ . Esta masa se conoce como *masa asintótica*, y para este caso corresponde con la definición de la *masa ADM*, llamada así pues se calcula formalmente mediante la descomposición *Arnowitt-Deser-Misner* del espacio-tiempo.

Dados valores fijos de  $\beta$  y  $\mu$ , para cada elección de  $\sigma_0$  y  $\omega$ , el sistema de ecuaciones tiene soluciones que satisfacen las condiciones asintóticas solo cuando  $f_0$  toma ciertos valores particulares, es decir, el problema que se trata es un problema de eigenvalores. De forma equivalente, se pueden elegir  $\sigma_0$  y  $f_0$ , y se tiene así un problema de eigenvalores para la frecuencia  $\omega$ . Diferentes eigenvalores corresponden con un número diferente de nodos en la solución de  $f(r)$  y  $g(r)$ . En este trabajo se buscan soluciones sin nodos, es decir, las soluciones del estado base. En [9] se argumenta que las soluciones de estrellas de bosones con nodos tienden a ser inestables.

Para buscar las soluciones numéricas del sistema se usa el software *Mathematica*. Las condiciones iniciales se establecen considerando el valor inicial de la coordenada radial  $r_i = 0.1$  y se fijan los valores  $\sigma = 1/2$ ,  $\mu = 1$  y  $G = 1/4\pi$ . Para cada elección de los parámetros libres  $\sigma_0$  y  $f_0$  se rastrea la frecuencia del campo vectorial  $\omega$  para la cual la solución es asintóticamente plana. Las frecuencias  $\omega$  se trabajan con 4 cifras significativas, y se busca que las soluciones manifiesten planitud asintótica al menos hasta  $r/2\mu = 80$ . El factor  $2\mu$  se escribe aquí para ajustar las unidades.

La Figura 1 muestra los comportamientos típicos de la métrica y el campo vectorial obtenidos siguiendo el método descrito en el párrafo anterior. Se muestran los componentes radiales de la métrica y del vector, ignorando el factor oscilante en el tiempo en este último. Las componentes temporales no se muestran pues tienen comportamientos cualitativamente similares. Se puede apreciar el hecho de que la solución es localizada: para el caso desplegado en la figura, el campo escalar está concentrado en la región  $r < 40$ . Fuera de esta región, el campo vectorial es despreciable y la métrica muestra el comportamiento esperado de una métrica de Schwarzschild.

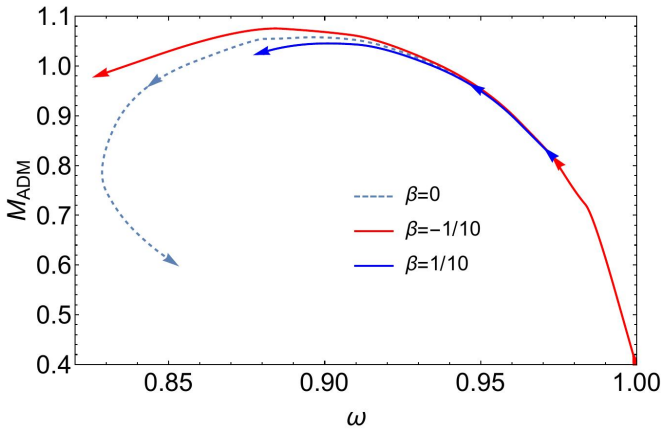
Habiendo establecido la existencia de soluciones, se procede a explorar el espacio de parámetros. Se busca un conjunto de soluciones tipo estrellas de bosones para distintos valores de  $f_0$  y



**Fig. 1:** Perfil típico del componente radial de la métrica y del campo vectorial (a tiempo fijo). Se aprecia que para distancias grandes la métrica se aproxima a una métrica plana y el campo vectorial se aproxima a cero. El crecimiento de  $g(r)$  cerca de  $r = 100$  es un error numérico que se puede evitar aumentando la precisión numérica.

$\sigma_0$ , tomando valores del parámetro de acoplamiento  $\beta = 1/10$ ,  $\beta = -1/10$  y  $\beta = 0$ , y fijando en todos los casos la masa del campo vectorial como  $\mu = 1/2$ . En la Figura 2 se grafica la masa asintótica,  $M$ , de la configuración contra el eigenvalor  $\omega$  correspondiente a una solución localizada y aislada, para  $\beta = 1/10$ ,  $\beta = -1/10$  y  $\beta = 0$ . Note que el valor reportado de  $\omega$  no es el que se obtiene directamente de la solución numérica, sino el que se obtiene después de re-escalar el componente temporal de la métrica de modo que  $g_{tt}(r \rightarrow \infty) = 1$ . Cada punto sobre las curvas corresponde a una solución con la masa y frecuencia indicadas en la gráfica y con los valores de los parámetros mencionados anteriormente. El valor inicial de  $\sigma_0$  también es el mismo para todas las soluciones, pero esto es irrelevante debido a la invariancia bajo reparametrizaciones. Entonces, los únicos parámetros de entrada que varían en cada solución son  $f_0$  y  $\omega$ . La masa  $M$  es un parámetro de salida. Los cambios de  $\omega$  y  $M$  se muestran explícitamente en la Figura 2. El cambio de  $f_0$  corresponde con recorrer cada curva de derecha a izquierda, es decir, para  $f_0 \rightarrow 0$  se tiene  $\omega \rightarrow 0$ , conforme  $f_0$  aumenta se llega a la masa máxima, y si  $f_0$  incrementa aún más, se llega a la zona de soluciones inestables. Finalmente, cabe mencionar que las curvas mostradas en Figura 2 se obtuvieron mediante interpolación de un número finito de puntos correspondientes a un número finito de soluciones.

La familia de soluciones con  $\beta = 0$  corresponde a las soluciones de las estrellas de Proca reportadas en [19]. En la Figura 2 se puede apreciar que la masa máxima de las soluciones para  $\beta = -1/10$  es ligeramente superior a la masa máxima



**Fig. 2:** Soluciones para la masa ADM del sistema en función de la frecuencia  $\omega$  para los valores del parámetro de acoplamiento  $\beta = 0.1$ ,  $\beta = -0.1$  y  $\beta = 0$ . Las flechas indican la dirección en que incrementa la condición inicial  $f_0$ .

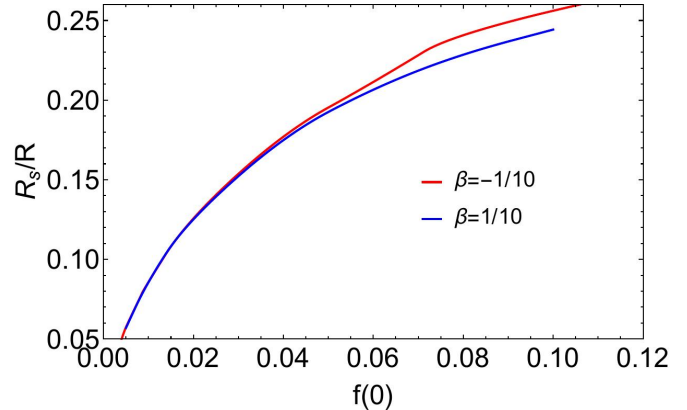
$M_{PSmax} = 1.058$  de las estrellas de Proca y de bosones [22], mientras que la masa máxima de la rama  $\beta = 1/10$  está por debajo de  $M_{PSmax}$ .

En Figura 2, la parte izquierda de la curva para  $\beta = 0$ , debajo de  $M_{ADM} \approx 0.8$  corresponde a soluciones inestables. Para  $\beta = \pm 1/10$  no se logró encontrar un comportamiento similar, esto debido a la precisión numérica con la que se trabajó, sin embargo, en ambos casos se logró llegar a la configuración con masa máxima.

Otra propiedad importante de los objetos auto-gravitantes es su compacticidad, que se define como  $C = M/R$ , donde  $M$  es la masa asintótica de la estrella y  $R$  es su radio. En el caso de estrellas de bosones o de Proca, las cuales no tienen una superficie bien definida,  $R$  se define como el radio que contiene el 95% de la masa asintótica. Esta propiedad se analiza con más detalle en la siguiente sección.

## 5. Análisis de Resultados

Los resultados presentados en la sección anterior establecen la existencia de estrellas de Proca generalizado (EPG) e indican que la presencia de la interacción no-mínima entre el campo vectorial y la métrica modifica las masas de las estrellas de bosones, de forma tal que el tipo de modificación depende del signo de la constante de acoplamiento  $\beta$ . Un análisis más significativo se puede hacer en términos de la compacticidad,  $C$ , de las soluciones. Para un agujero negro de Schwarzschild, la compacticidad es  $C = R_s/2R_s = 1/2$ . Este valor representa la máxima compacticidad posible en RG para un objeto estático y esféricamente simétrico. Una estrella de neutrones típica tiene



**Fig. 3:** Compacticidad para estrellas de bosones con  $\beta = -0.1$  y  $\beta = 0.1$ . Vemos que cuando el valor central del campo vectorial es pequeño todos los casos son prácticamente indistinguibles.

una compacticidad entre 0.1 y 0.2, mientras que para una estrella de bosones formada por campo escalar se tiene  $C \leq 0.35$  [22].

En la Figura 3 se muestran los resultados para la compacticidad de estrellas de bosones formadas por campo vectorial, para los casos  $\beta = 0.1$ ,  $\beta = -0.1$ . El caso  $\beta = 0$ , correspondiente a estrellas de Proca, quedaría encerrado entre las dos curvas que se muestran en la Figura. Vemos que los resultados son consistentes tanto con estrellas de Proca como con estrellas de bosones usuales, puesto que la compacticidad está en el mismo rango de valores que para esas configuraciones. Como era de esperarse a partir de la solución analítica para  $r$  pequeño, conforme  $f_0 \rightarrow 0$  la configuración desaparece, es decir, su masa tiende a 0. Puesto que la masa la podemos pensar como una densidad multiplicada por el volumen, que escala como la potencia cúbica del radio, el cociente  $M/R$  tiende también a cero, como muestra la Figura 3.

La compacticidad es una propiedad que se puede relacionar con observables de un sistema astrofísico, tales como su radiación en ondas gravitacionales, su deformabilidad debida a fuerzas de marea y su contribución a la deflexión de la luz. Por lo tanto, de los resultados anteriores se desprende que dichos observables son similares para cualquier tipo de estrella de bosones, ya sean escalares o vectoriales. Un análisis detallado de los fenómenos mencionados sería necesario para discriminar modelos utilizando datos observacionales. Por ejemplo, a partir de un cálculo aproximado basado en argumentos generales, se estima que la radiación gravitacional de un sistema binario de estrellas de bosones es [23]-

$$E_{rad} \approx 0.96 CM, \quad (13)$$

donde  $M$  es la masa total del sistema binario y  $C$  es la compacticidad de las estrellas iniciales. Este resultado indica que una compacticidad de  $C = 0.12$  es suficiente para rebasar la radiación emitida por un sistema equivalente de agujeros negros, la cual corresponde al 5% de la masa inicial. Para las estrellas de Proca, hemos visto que  $C$  puede estar alrededor de  $C = 0.30$ , por lo que un sistema binario formado por estos objetos puede emitir una cantidad considerablemente mayor

de energía en ondas gravitacionales que un sistema de agujeros negros.

Por otra parte, en [24] se mostró que para un agujero negro perteneciente a una subclase de la teoría de Horndeski análoga a la teoría que estudiamos aquí para la generalización de Proca, la separación angular de las imágenes formadas por lentes gravitacionales difieren por alrededor de 10% de sus correspondientes en un agujero negro de Schwarzschild. Esto es relevante porque es cercano a la resolución angular actual de las imágenes del agujero negro en la galaxia M87 tomadas por el *Event Horizon Telescope*. Dada la analogía entre el sistema estudiado en [24] y el sistema estudiado aquí, es de esperarse que los efectos de lente gravitacional en la teoría generalizada de Proca presenten diferencias del mismo orden con respecto a los efectos debidos a estrellas de bosones o estrellas de Proca. Los puntos mencionados anteriormente se reportarán detalladamente en una publicación posterior.

También vale la pena resaltar que una característica del modelo vectorial generalizado es que admite un espectro mayor de soluciones, pues tanto  $\beta$  como  $f_0$  influyen en las características macroscópicas de la configuración.

En vista de lo anterior, las estrellas generalizadas de Proca pueden considerarse al mismo nivel que otros tipos de estrellas de bosones como candidatos para ser un componente de la materia oscura.

## 6. Conclusiones

En este trabajo se mostró que la teoría generalizada de Proca admite soluciones similares a las estrellas de bosones y a las estrellas de Proca, es decir, soluciones que describen densidad de energía localizada en una región finita de un espacio-tiempo asintóticamente plano. A diferencia de las estrellas de bosones, las soluciones que se construyeron aquí están formadas por un campo vectorial masivo, y a diferencia de las estrellas de Proca, corresponden a una teoría más general que no solo incluye la masa del vector sino interacciones con el tensor de Einstein. Estas nuevas soluciones se denominan *Estrellas de Proca Generalizado* (EPG).

Se encontró que dependiendo del signo del acoplamiento  $\beta$  con el tensor de Einstein, las EPG pueden tener una masa y compacticidad mayor ( $\beta < 0$ ) o menor ( $\beta > 0$ ) que las estrellas de Proca. Los cambios en la compacticidad son relevantes, pues se traducen en cambios de cantidades que pueden ser observadas o estimadas mediante astronomía de ondas gravitacionales, tales como la deformabilidad de una estrella y la cantidad de radiación gravitacional emitida durante una colisión de objetos compactos. Un análisis detallado de dichos fenómenos se reportará en un trabajo posterior. También es interesante explorar la interpretación de estas soluciones en el sentido original propuesto por Wheeler, es decir, como una manera de describir partículas fundamentales.

Las configuraciones estudiadas en este trabajo se restringieron a valores pequeños de  $|\beta|$ . Esto es debido a consideraciones técnicas: conforme este parámetro aumenta, la precisión requerida y el tiempo de cómputo también aumentan considerablemente.

Algunas maneras en las que este problema podría resolverse son i) cambiar el software y el método utilizados, ii) manipular las ecuaciones de movimiento mediante re-escalamientos y definición de nuevas funciones y iii) automatizar completamente el proceso de búsqueda de soluciones. Estas posibilidades se están analizando y se implementarán en trabajos posteriores.

## 7. Agradecimientos

A.S. agradece el apoyo otorgado por la Beca para estudios de maestría CONACyT-704099. J.C., J.L. y C.O. agradecen los apoyos UAZ-2019-37970, UAZ-2019-37818 y UAZ-2018-37554.

## Referencias

- [1] Hubble E., *A Relation between Distance and Radial Velocity among ExtraGalactic Nebulae*. Proceedings of the National Academy of Science, 1929, 15(3):168–173.
- [2] Weinberg S., *The Cosmological Constant Problem*. Rev. Mod. Phys., 1989, 61:1-23.
- [3] Antonio Padilla. *Lectures on the Cosmological Constant Problem*. 2015.
- [4] Horndeski G. W., *Second-order scalar-tensor field equations in a four dimensional space*. Int. J. Theor. Phys., 1974, 10:363–384.
- [5] Kobayashi T., Yamaguchi M., y Yokoyama, J., *Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations*, Prog.Theor. Phys., 2011, 126:511–529.
- [6] Heisenberg, L., *Generalization of the proca action*, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2014, (05):015–015.
- [7] Chagoya J., Niz G. y Tasinato G., *Black Holes and Abelian Symmetry Breaking*, Class. Quant. Grav., 2016, 33(17):175007.
- [8] Chagoya J., Niz G. y Tasinato G., *Black Holes and Neutron Stars in Vector Galileons*, Class. Quant. Grav., 2017, 34(16):165002.
- [9] Seidel E. y Suen W-M., *Dynamical Evolution of Boson Stars. I. Perturbing the Ground State*. Phys. Rev., 1990, D42:384–403.
- [10] Sin S-J., *Late-time phase transition and the galactic halo as a bose liquid*, 1994, Phys. Rev. D, 50:3650–3654.
- [11] Suárez A., Robles V., y Matos T., *A review on the scalar field/bose-einstein condensate dark matter model*, Accelerated Cosmic Expansion, 2014, pages 107–142.
- [12] Matos T. y Siddhartha Guzman F., *Scalar fields as dark matter in spiral galaxies*. Class. Quant. Grav., 2000, 17:L9–L16.
- [13] Siddhartha Guzmán F., *Accretion disk onto boson stars: A way to supplant black hole candidates*, Physical Review D, 2006, 73(2).
- [14] Guzman F. y Rueda-Becerril J. M., *Spherical boson stars as black hole mimickers*, Physical Review D, 2009, 80(8):084023.
- [15] Torres, D., Capozziello S., y Lambiase G., *Supermassive boson star at the galactic center?* 2000, Physical Review D, 62(10).
- [16] Vincent F., Meliani Z., Grandclément P., et al., *Imaging a boson star at the galactic center*, Classical and Quantum Gravity, 2016, 33(10):105015.
- [17] Cunha P., Font J., Herdeiro C., et al., *Lensing and dynamics of ultracompact bosonic stars*, Physical Review D, 2017, 96(10).
- [18] Goodsell M., Jaeckel J., Redondo J., et al., *Naturally light hidden photons in large volume string compactifications*, 2009, JHEP 0911:027.

- [19] Brito R., Cardoso V., Herdeiro C., *et al.*, *Proca stars: Gravitating Bose–Einstein condensates of massive spin 1 particles*. Phys. Lett., 2016, B752:291–295.
- [20] Bekenstein J., *Nonexistence of baryon number for static black holes*, Phys. Rev. D, 1972, 5:1239–1246.
- [21] Martín García J. M., *xAct: Efficient tensor computer algebra for the Wolfram Language*, disponible en <http://www.xact.es/>
- [22] Liebling, S. y Palenzuela C. *Dynamical boson stars*, Living Reviews in Relativity, 2017, 20(1).
- [23] Palenzuela C., Pani P., Bezares M., *et al.*, *Gravitational Wave Signatures of Highly Compact Boson Star Binaries*, Phys. Rev. D, 2017, 96 (2017) 10, 104058.
- [24] Badía J. y Eiroa E. F., *Gravitational lensing by a Horndeski black hole*, Eur. Phys. J. C, 2017, Eur.Phys.J.C 77 (2017) 11, 779.