Derivada algebraica y desarrollos de Taylor algebraicos

Ingrid Trinidad Calderón Rubio, Jesús Alfonso Riestra Velázquez

Resumen:

La investigación proviene de una propuesta didáctica y curricular para introducir la derivada en el contexto de problemas (isoperimétricos) de máximos y mínimos, sin utilizar el concepto de límite, sino métodos algebraicos que provienen del Método de Fermat para determinar máximos y mínimos. Se describen aspectos teóricos y prácticos de una experimentación actualmente en curso.

Palabras clave: derivada algebraica, propuesta didáctica.

I. Introducción

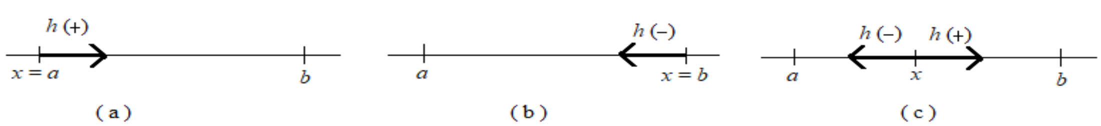
La presente investigación proviene de una propuesta didáctica y curricular para introducir la derivada en el contexto de problemas (isoperimétricos) de máximos y mínimos, sin utilizar explícitamente el concepto de límite. En esta dirección, Riestra (2001) propuso una versión moderna del Método de Fermat para la determinación de máximos y mínimos en donde aparece implícitamente una expresión que corresponde a la función derivada, referida posteriormente como la *derivada algebraica*, la cual cristalizó en la tesis doctoral de Ma. Eugenia Andreu y en dos artículos con su asesor (Andreu & Riestra, 2005; Andreu & Riestra, 2007), donde se mostró que es posible justificar las reglas de derivación con esta derivada definida algebraicamente. Sin embargo, el nuevo método (como su predecesor) sólo da condiciones necesarias para máximos o mínimos y la argumentación geométrica que soporta el método y la definición de derivada algebraica, ha resultado controvertida.

Para dar no sólo condiciones necesarias, sino además condiciones suficientes para máximos y mínimos, se propuso después desarrollar la diferencia $f(x+h)-f(x)$ en potencias del incremento algebraico h. Este método que generaliza el de Fermat, caracteriza los máximos y los mínimos con los signos de tal diferencia y ha sido referido como el método de los *desarrollos de Taylor algebraicos*. Se implementó y experimentó por vez primera en la tesis de maestría de Aguilar (2007) y se reporta en un artículo con su asesor (Aguilar & Riestra, 2009). Aunque había ventajas en el nuevo método (condiciones suficientes para extremos), éste era más demandante en las destrezas algebraicas, incluidas las de cantidades relativas (en la comparación del orden de magnitud de las potencias de h cuando h es pequeña en magnitud), los desarrollos resultaban muy largos y tediosos y no se prestaba para obtener las reglas de derivación. Tratar de tener lo mejor de ambos métodos se intentó en la tesis de maestría de Calderón (2009): empezar con los desarrollos de Taylor y relativamente pronto tratar de conectar con la definición de derivada algebraica para aprovechar sus ventajas. La elección de un ejemplo físico para establecer la conección no resultó muy afortunado. De cualquier forma, una experiencia común en las investigaciones mencionadas son las deficiencias de los estudiantes en los prerrequisitos algebraicos.

II. Desarrollo

Dadas las particulares condiciones de los estudiantes en el Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec (TESE), los cuales en su mayoría son rechazados de otras instituciones (UNAM, IPN, UAM, etc.), nos hemos abocado a subsanar sus deficiencias cubriendo prerrequisitos de Aritmética (aritmética signada, notación científica), Fracciones, elementos de Geometría Analítica y Tópicos de Algebra (fracciones algebraicas, potencias, leyes de exponentes, productos notables, etc.). Se va a experimentar una introducción al Cálculo Diferencial de acuerdo a una nueva versión del Método de los desarrollos de Taylor algebraicos que integra a la derivada algebraica, con un grupo que subsanó exitosamente las mencionadas deficiencias en un semestre anterior, el cual la primera semana iniciará con un repaso de un material didáctico con Ejemplos y Ejercicicios sobre aplicaciones de productos notables enfocadas a introducir los problemas isopérimetricos del Cálculo. Damos sólo una visión esquemática: *Ejemplo 1.* Hallar las dimensiones de un rectángulo de área 35 u.c. cuyo perímetro sea de 24 unidades. Puesto que los lados opuestos son iguales el problema se replantea con un semiperímetro de 12 unidades ($base + altura$). El planteamiento da origen a una ecuación cuadrática cuyas raíces son 5 y 7. La primera da una base de 5 unidades y una altura de 7. La segunda, una base de 7 y una altura de 5. Se hace ver que ambas son lo mismo. *Ejemplo 2.* Se pregunta si es posible construir un rectángulo con el mismo semiperímetro de 12 unidades y área 32 u.c. (respuesta afirmativa). *Ejemplo 3.* ¿Es posible construir un rectángulo con el mismo semiperímetro de 12 unidades y área 42 u.c.? (respuesta negativa, no hay raíces reales). *Ejemplo 4.* ¿Cuál es el área máxima qué puede tener un rectángulo de semiperímetro de 12 unidades? (respuesta 36 u.c., completando el cuadrado en la expresión para el área).

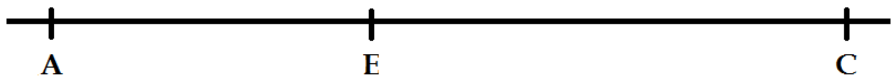
Método de los desarrollos de Taylor algebraicos. La idea es determinar máximos y mínimos locales con los signos de las diferencias $f(x+h)-f(x)$ correspondientes a un incremento algebraico $h \neq 0$. Así, una diferencia que mantiene un signo *positivo* (respectivamente *negativo*) para cualquier valor de h "suficientemente cercano" a cero y *permisible,* caracteriza a x como un *mínimo* (respectivamente *máximo*) local de la función. Donde un valor *permisible* de h significa que $x+h$ se mantiene en el dominio de la función. Así, si el dominio es el intervalo $[a,b]$, para $x=a$ los valores permisibles de h son *positivos,* caso (a) en la figura, para $x=b$ los valores permisibles de h son *negativos,* caso (b) y cuando x es *interior* al intervalo dominio, caso (c), pueden ser tanto positivos como negativos.



Para analizar su signo se desarrolla la diferencia $f(x+h)-f(x)$ en potencias de h:

$f(x+h)-f(x)=E_1(x)h+E_2(x)h^2+TOS$ [términos en h^3, etcétera]

donde *TOS,* un acrónimo por *Términos de Orden Superior*, depende del contexto: después de la segunda potencia significa términos que inician con la tercera potencia. El principio fundamental es que para h "suficientemente cercana" a cero, *los signos de las potencias inferiores* son *dominantes*. Veamos un ejemplo



Problema de Fermat. Dividir el segmento *AC* en *E* de modo que el producto de las partes sea máximo; sea b la longitud de *AC* y llamemos x a una de las partes, entonces la otra será $b - x$ y su producto $x(b - x)$, luego $f(x) = bx - x^2$, cuyo dominio es el intervalo $[0, b]$, es la función cuyo máximo interesa. Desarrollamos la diferencia:

$$f(x + h) - f(x) = b(x + h) - (x + h)^2 - (bx - x^2) = (b - 2x)h - h^2, \text{ luego}$$

$$f(x + h) - f(x) = (b - 2x)h - h^2, \text{ con coeficientes } E_1(x) = b - 2x \text{ y } E_2(x) = -1$$

El coeficiente $E_1(x)$ es llamado el *Coeficiente Diferencial* de la función. En el extremo inicial, $x = 0$, $E_1(0) = b$ es positivo y el signo de h es positivo, como ilustra el caso (a), en el extremo final, $x = b$, $E_1(b) = b - 2b = -b$ es negativo y los valores permisibles de h son negativos, luego para h "suficientemente cercana" a cero, tendremos los signos

$sg\big(f(0 + h) - f(0)\big) = sg(E_1(0)h + TOS) = sg(E_1(0)h) = (+)(+) = +$; un *mínimo* y $sg\big(f(b + h) - f(0)\big) = sg(E_1(b)h + TOS) = sg(E_1(b)h) = (-)(-) = +$; un *mínimo.* Por lo tanto $x = 0$ y $x = b$ son *mínimos locales* de la función. Cuando x es interior al intervalo $[a, b]$ la situación es distinta. En este caso, si $E_1(x) \neq 0$, como el incremento h puede ser tanto positivo como negativo, caso (c). El signo de $E_1(x)h$ cambiará con el signo de h, luego para h "suficientemente cerca" de 0, el signo de $f(x + h) - f(x)$ cambiará con el signo de h, por lo que cuando $E_1(x) \neq 0$ la función no tendrá máximo ni mínimo: una condición necesaria para que la función alcance un máximo o un mínimo en un punto interior x es que $E_1(x) = 0$ (que el coeficiente diferencial, que no es otro que la derivada, se anule). La condición $E_1(x) = b - 2x = 0$, nos da $x = {}^{b}/_{2}$. Desarrollamos la diferencia:

$$f\left(\frac{b}{2} + h\right) - f\left(\frac{b}{2}\right) = E_1\left(\frac{b}{2}\right)h + E_2\left(\frac{b}{2}\right)h^2 = 0 \cdot h + (-1)h^2 = -h^2 \; (-)$$

En cualquier caso, sea h positiva o negativa, $-h^2$ será negativa, por lo que $x = {}^{b}/_{2}$ es un *máximo* de $f(x)$. El producto es máximo cuando el segmento se divide en partes iguales.

<u>La Derivada Algebraica</u>. La diferencia $f(x + h) - f(x)$ siempre se anula con $h = 0$, *independientemente del valor de x*; por el teorema del factor $f(x + h) - f(x) = Q_x(h)h$, donde $Q_x(h)$, el *cociente* de dividir la diferencia $f(x + h) - f(x)$ entre h, es llamado el *cociente diferencial.* Si $f(x + h) - f(x) = E_1(x)h + TOS = (E_1(x) + TOS)h$, entonces $Q_x(h) = E_1(x) + TOS$, por lo que $Q_x(0) = E_1(x)$. A $Q_x(0)$, que es el cociente diferencial cuando el incremento h se hace cero, le llamaremos la *derivada algebraica,* denotada con $f'(x)$, pues es una auténtica derivada obtenida algebraicamente.

Referencias Bibliográficas

Aguilar, A. M. y Riestra, J. A. (2009). Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada. El Cálculo y su Enseñanza, 1, 1-12.

Andreu, M.E. y Riestra, J. A. (2005). Propuesta alternativa para la enseñanza del concepto de derivada desde una perspectiva histórico epistemológica de su desarrollo. En J. C. Cortés y F. Hitt (Eds.), Reflexiones sobre el aprendizaje del Cálculo y su enseñanza (157-174). Morelia, Mich., México: Morevallado Editores.

Andreu, M. E. y Riestra, J. A. (2007). ET SI NOUS EN RESTIONS À EULER ET LAGRANGE? Mise à l'essai d'un enseignement d'analyse à des ètudiants non mathématiciens en début d'etudes supérieures. Annales de Didactique et Sciences Cognitives, Irem de Strasbourg, 12, 165-187.

Calderón, I. T. (2009). Un refinamiento de un método algebraico de máximos y mínimos para introducir la derivada y algunas de sus propiedades. (Tesis de maestría inédita). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, D. F., México.

Riestra, J. A. (2001). El Método de Fermat para la determinación de extremos de polinomios. Una Visión Moderna. Miscelánea Matemática, 34, 103-112.

Autores:

Ingrid Trinidad Calderón Rubio. Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec, México.
ingridcalderonrubio@gmail.com
Jesús Alfonso Riestra Velázquez. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.
riestra@cinvestav.mx