Matematización del Teorema Fundamental del Cálculo en el nivel referencial, con el uso de tecnologías digitales

Ingrid Janeth Jácome Anaya, Jorge Enrique Fiallo Leal, Sandra Evely Parada Rico

Resumen:

En este documento se presentan avances de una investigación en desarrollo que pretende caracterizar los niveles de matematización que alcanzan los estudiantes de un curso de Cálculo Integral en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), mediante el uso de tecnologías digitales a través del diseño, implementación y evaluación de una secuencia de situaciones. Para lo anterior usaremos la Educación Matemática Realista (EMR) y mostraremos la descripción de una secuencia de tareas planteadas en dos situaciones problemáticas realistas dentro del Fenómeno de Caída Libre, dado a partir de los primeros resultados de un análisis fenomenológico didáctico en construcción, y la caracterización a priori del nivel Referencial.

Palabras clave: matematización, teorema fundamental del cálculo, educación matemática realista.

I. Introducción

La comprensión de los objetos matemáticos asociados a las ideas de variación y acumulación son complejos, y lo es más la articulación entre estos, la cual se establece a través del Teorema Fundamental del Cálculo (Robles, Tellechea y Font, 2014). En cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de dichos objetos, Muñoz (2000) menciona que una de las problemáticas principales es la separación entre lo algorítmico y lo conceptual, y para propiciar el enlace, este autor identifica una condición necesaria que se refiere a la existencia de situaciones problema. Freudenthal (1991) las define como contextos y situaciones problemáticas realistas, en el sentido de representables, razonables e imaginables para los estudiantes y que son las generadoras de su actividad matematizadora, concibiendo dicha actividad como el proceso que conlleva a la organización de la realidad con medios matemáticos, incluida la matemática misma. Esta actividad es un proceso discontinuo que pasa por distintos niveles, *Situacional, Referencial, General* y *Formal.*

Teniendo en cuenta que las representaciones estáticas y limitadas de los libros de texto utilizados tradicionalmente en la enseñanza del cálculo restringen la naturaleza dinámica de los objetos y la limitan a ejemplos, que conducen a desarrollar una imagen restringida del concepto en cuestión (Tall y Sheath, 1983) se hace relevante la introducción de las tecnologías digitales en la educación, puesto que permiten la visualización dinámica de conceptos matemáticos que no se logra fácilmente en el papel. Por tal razón, describimos una secuencia de tareas planteadas en dos situaciones problemáticas realistas con el uso de tecnologías digitales y la caracterización a priori del Nivel Referencial.

II. Educación Matemática Realista

En este enfoque, los estudiantes deben aprender matemáticas desarrollando conceptos y herramientas matemáticas en situaciones de la vida diaria que tengan sentido para ellos, éstas son, situaciones realistas. Donde “el término “realista” se refiere más a la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos puedan imaginar que a la realidad o autenticidad de los mismos” (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p.10).

Bressan, Gallego, Pérez y Zolkower (2016), basados en las ideas de la EMR, proponen los siguientes niveles de matematización: *Situacional, Referencial, General y Formal*. Estos representan el pasaje de conocimiento informal al formal y están caracterizados por el tipo de modelos que surgen cuando los estudiantes se enfrentan a una situación problemática realista, teniendo en cuenta que no se refiere a modelos preconstruidos e impuestos desde la matemática formal sino a modelos emergentes. En el nivel *Referencial* aparecen las representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación particular, los cuales describen y esquematizan los conocimientos y procedimientos de la situación problema.

Según Drijvers, Boon, Doorman, Bokhove y Tacoma, (2013) el desafío está en encontrar situaciones que pidan el desarrollo de modelos emergentes y permitan un proceso de abstracción progresiva. Para encontrarlas, Freudenthal (1983) propone la realización de un Análisis Fenomenológico Didáctico, el cual inicia con la identificación de los contextos donde tienen sentido los objetos matemáticos, los fenómenos donde surgen o son organizadores y las situaciones donde tienen uso.

III. Proceso Metodológico

Para la identificación de los contextos, fenómenos y situaciones matemáticas donde el TFC tiene sentido, surge y tiene uso, es importante analizar y responder los cuestionamientos ¿para qué se usa el TFC? ¿a qué problemas da respuesta el TFC?, para ello estamos realizando una pequeña revisión epistemológica de los objetos matemáticos inmersos en el TFC, derivada e integral respectivamente y un pequeño análisis del contenido matemático escolar teniendo como referencia algunos libros utilizados usualmente en la enseñanza del Cálculo Integral. A través de dicho análisis hemos logrado identificar el fenómeno de Caída Libre, en el que vale la pena referirnos a las situaciones de hallar la distancia a partir de la velocidad y hallar la velocidad a partir de la distancia, donde las tareas enmarcadas en dichas situaciones se diseñaron con el fin de caracterizar los tres primeros niveles de matematización del TFC.

En el *Nivel Referencial* del TFC, teniendo en cuenta las acciones descriptoras planteadas por Gonzales (2015), se espera que los estudiantes identifiquen y representen la relación existente entre las magnitudes variables, distancia y velocidad, a partir de las ideas de variación y acumulación (Tabla 1).

Tabla 1: Descriptores nivel Referencial del Teorema Fundamental del Cálculo

Acciones Descriptoras (Gonzales, 2005)	Descriptores a priori (TFC)
Representar el problema de acuerdo con los conceptos matemáticos pertinentes y plantear supuestos.	Identificar y representar la distancia recorrida como la acumulación del cambio de la velocidad.
Comprender las relaciones existentes entre el lenguaje del problema y el lenguaje formal y simbólico que se necesita para comprenderlo en términos matemáticos.	Identificar y representar la velocidad de la pelota como la razón de cambio de la acumulación de la velocidad.

Traducir el problema a términos matemáticos.	Identificar y representar la relación existente entre las magnitudes variables (distancia-velocidad), acumulación del cambio (distancia) y razón de cambio de la acumulación de la velocidad (velocidad). Plantear los supuestos acerca de cómo encontrar una magnitud variable (distancia, velocidad) conociendo la otra.

Fuente: realizada por los autores

La secuencia de tareas planteadas en las dos situaciones anteriores está dirigida a estudiantes de Cálculo Integral que no han visto el TFC. Dichas tareas conducen a la construcción de modelos y la abstracción de estos. Para el desarrollo de la secuencia los estudiantes usarán el software Tracker, el cual les permitirá estudiar un fenómeno a través del seguimiento manual y automatizado de objetos, obteniendo de forma inmediata información tabular y gráfica acerca de la posición, velocidad y aceleración, y la exploración de ideas de variación y acumulación.

En algunas de las tareas se espera que los estudiantes, de acuerdo con la información dada por Tracker, en cuanto a la distancia recorrida por el objeto en instantes de tiempo, hallen la distancia recorrida por éste en intervalos de tiempo. Posteriormente que hallen, en los mismos intervalos de tiempo, el área bajo la curva velocidad con la ayuda del software y la comparen con las distancias obtenidas en dichos intervalos y de acuerdo con esto, conjeturen que “la distancia recorrida por el objeto en intervalos de tiempo está dada por el área bajo la curva velocidad en los mismos intervalos de tiempo”. De ahí, se espera que se cuestionen y logran conjeturar qué sucede en instantes de tiempo.

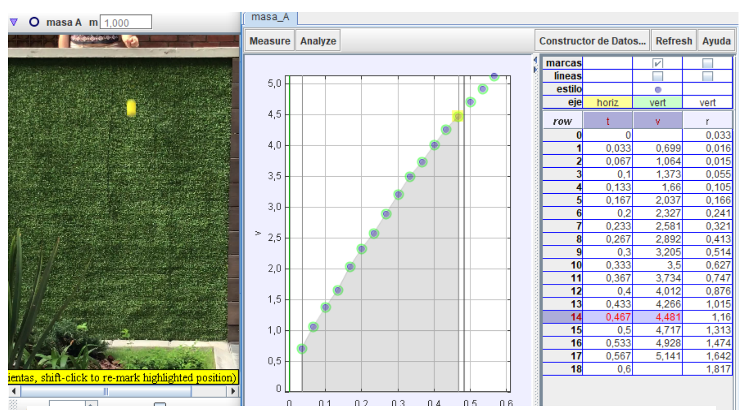

Figura 1: Simulación en Tracker

Posteriormente se plantea el análisis de la razón de cambio promedio e instantánea del área bajo la curva velocidad (distancia), de manera tal que concluyan en primera instancia que “la velocidad promedio del objeto está dada por la razón de cambio promedio del área bajo la curva velocidad (distancia)”, y a partir de la exploración en el software y las tareas planteadas logren conjeturar que “la velocidad instantánea del objeto está dada por la razón de cambio instantánea del área bajo la curva velocidad (distancia)”. Se espera que los estudiantes logren identificar que las magnitudes variables trabajadas en la situación problema están relacionadas, cómo están relacionadas, y cómo hallar una magnitud conocida la otra, utilizando los modelos verbales que den cuenta de la derivada y la integral como conceptos que representan las ideas de variación y acumulación respectivamente.

IV. Reflexiones

Se espera que los estudiantes lleguen al Nivel General del TFC, esto es, que logren conjeturar que los objetos matemáticos, derivada e integral están relacionados, modelen dicha relación y cuestionen la validez de éste.

Referencias Bibliográficas

Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S., & Zolkower, B. (2016). Educación Matemática Realista. Bases Teóricas. GPDM, Agentina.

Drijvers, P., Boon, P., Doorman, M., Bokhove, C., & Tacoma, S. (2013). Digital design: RME principles for designing online tasks. En C. Margolinas (Ed). Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22 (1), (pp. 56-62). Oxford, Inglaterra.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Gonzales, O. (2015). Caracterización de la actividad argumentativa de estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones (Tesis de maestría no publicada) Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3(2), 131-170.

Robles, M., Tellechea, E. y Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. Educación Matemática, 26(2), 69-109.

Tall, D. y Sheath, G. (1983). Visualizing Higher Level Mathematical Concepts Using Computer Graphics. En Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 357–362.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. Educational Studies in Mathematics 54, 9-35.

Autores:

Ingrid Janeth Jácome Anaya. Universidad Industrial de Santander, Colombia.
jacomeaij@hotmail.com
Jorge Enrique Fiallo Leal. Universidad Industrial de Santander, Colombia.
jfiallo@uis.edu.co
Sandra Evely Parada Rico. Universidad Industrial de Santander, Colombia.
sanevepa@uis.edu.co