

El pensamiento y lenguaje variacional como fundamento para el diseño de situaciones de aprendizaje del cálculo

Mario Caballero-Pérez, Angélica Moreno Durazo

Resumen:

Presentamos las consideraciones teóricas que sustentan el diseño de dos situaciones de aprendizaje (SA) con miras al desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV). La primera SA consiste de un problema de llenado de recipientes con flujo constante, situación que frecuentemente es utilizada en investigaciones que se interesan por analizar los procesos mentales que siguen los estudiantes para resolverlas y en la forma en cómo conceptos como pendiente se expresan en sus argumentos (Johnson, 2015). La segunda SA consiste en dibujar una pista de carreras a partir del análisis de velocidad de un vehículo presentada en una tabla numérica.

Palabras clave: pensamiento y lenguaje variacional, socioepistemología, cálculo.

Nuestra propuesta se enmarca en la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, de modo que nuestro punto de interés no es observar el uso de los conceptos matemáticos en una actividad, sino en el desarrollo de prácticas que favorecen el estudio y la predicción de procesos de cambio, a partir de lo cual se construyen significados a los conceptos matemáticos. El enfoque de las situaciones gira sobre el PyLV, línea de investigación que se interesa por las formas de pensar, argumentar, organizar y comunicar matemáticamente procesos de cambios (Cantoral, 2016). El marco teórico que fundamenta el diseño de las SA consiste de dos elementos: una caracterización de las nociones de cambio y variación, y el desarrollo de prácticas variacionales.

Entendemos por *cambio* toda modificación que tiene el valor de una variable que, de manera general, es percibida por los sentidos. En contraste, la *variación* es una noción que no se percibe de manera directa por los sentidos, sino que consiste de una abstracción de orden superior de las propiedades y características del cambio (Cabrera, 2009). En consecuencia, observar el cambio o ser consciente de él no es suficiente para caracterizar a la variación (Cantoral, 2016), se requiere de al menos tres aspectos:

1. La medición del cambio (reconocimiento cuantitativo de aquello que cambia).
2. El estudio de la forma en cómo la medida del cambio se modifica (si los incrementos son positivos, negativos, constantes, si son cada vez mayores o menores, etc.).
3. El reconocimiento de por qué las variables cambian de la forma en qué lo hacen.

Respecto a los primeros dos puntos, las investigaciones enmarcadas en el PyLV han centrado la atención en dos aspectos de la variación: los órdenes de variación superior y el carácter estable del cambio. En cuanto al primero, se considera que la variación posee diferentes órdenes (Hernández-Zavaleta y Cantoral, 2017), siendo el primer orden la medición del incremento en el valor de la variable y el segundo orden la medición del incremento en el incremento del primer orden de variación, y así sucesivamente para órdenes superiores; por ejemplo, un problema de movimiento en la Física refiere al primer orden de variación con el cambio de posición (velocidad) y el segundo al cambio de velocidad (aceleración).

El *carácter estable del cambio* (Cantoral y Farfán, 1998) es un elemento necesario para establecer predicciones, consiste en aquella regularidad asociada a la variación que determina el comportamiento de los estados ulteriores del fenómeno, esto se logra al caracterizar la dinámica que siguen las variables y sus variaciones. Por ejemplo, en una secuencia numérica el carácter estable del cambio consiste en la regularidad que determina el término enésimo.

El tercer punto consiste del reconocimiento de por qué las variables cambian de la manera en que lo hacen, lo cual consiste en el establecimiento de relaciones causales que proporcionen una base para el estudio de la variación, como se propone en (Caballero-Pérez y Cantoral, 2017). Consideramos que esto favorece la significación de los conceptos al proveer una base para la toma de decisiones sobre, por ejemplo, si se requiere calcular un volumen o un área, usar un proceso de derivación o uno de integración, o sobre reconocer si un fenómeno es de tipo lineal o cuadrático. En las dos SA que presentamos nos centramos en el reconocimiento de funciones lineales y el análisis de comportamientos no lineales.

El segundo elemento del marco teórico es el desarrollo de prácticas variacionales que favorecen la caracterización de fenómenos de variación y el contraste entre ellos (Caballero-Pérez y Cantoral, 2017). Por ejemplo, la comparación permite identificar aquello que cambia y cuantificarlo (es mayor/menor que, crece más que, decrece más que, etc.). La seriación, entendida como el estudio del cambio de estados sucesivos, permite reconocer patrones de crecimiento, de modo que, por ejemplo, se identifica que una función lineal crece o decrece a razón constante por cada unidad de la variable independiente. Con base en estas dos estrategias se obtiene información sobre la variación del fenómeno, lo que permite el uso de la predicción para anticipar estados o valores futuros mediante el uso de conocimiento matemático específico, por ejemplo, la configuración de operaciones aritméticas, el uso de criterios de la derivada, el cálculo de pendientes, etc.

Respecto al diseño de las situaciones, presentamos a modo de ejemplo las consideraciones tomadas para la situación de llenado de recipientes. Nos enfocamos en atender dos aspectos que fueron presentados en (Caballero-Pérez y Moreno-Durazo, 2017):

1. Para proporcionar la expresión algebraica de un fenómeno se requiere caracterizar la naturaleza del cambio de éste.
2. La distinción entre expresiones correspondientes a fenómenos con la misma naturaleza de cambio requiere de prácticas específicas como comparación, seriación, estimación y predicción.

La primera consideración consiste en que proporcionar la expresión algebraica que describa un fenómeno lineal precisa de establecer una relación de dependencia entre magnitudes, es decir, reconocer aquello que cambia y respecto de qué cambia. Asimismo, requiere caracterizar el cambio de manera cualitativa (cómo cambia) y de manera cuantitativa (cuánto cambia). Por ejemplo, para el caso de la función lineal esta naturaleza corresponde a una variación constante en el incremento o decremento de las variables. La segunda consideración contempla que, una vez identificado la naturaleza lineal de la variación, se precisa diferenciar entre fenómenos lineales, por ejemplo, ¿cómo un estudiante diferencia entre los comportamiento de las funciones $f(x) = 2x$ y $f(x) = \frac{1}{2}x$?

Esta SA propicia el reconocimiento de la función lineal como aquella de variación constante donde el trabajo en el contexto numérico permite significar los parámetros de la expresión $f(x) = mx + b$ como la cantidad de flujo (m) y la cantidad inicial de agua (b). En términos

generales, la SA fue diseñada considerando una evolución pragmática de la variación, mediante el desarrollo de prácticas variacionales y atendiendo a las preguntas ¿qué cambia? (relaciones de dependencia), ¿cómo cambia? (descripción cualitativa de comportamientos) y ¿cuánto cambia? (cuantificación de la variación).

Ambas SA han sido implementadas de manera piloto con estudiantes de bachillerato de México, y han mostrado ser viables para desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional relacionado a la identificación y caracterización de comportamientos, así como en la generación de estrategias y métodos para cuantificar la variación de esos fenómenos y predecir estados futuros. Las preguntas y actividades que conforman cada actividad fomentan que los estudiantes utilicen conocimientos matemáticos específicos como función y pendiente para dar cuenta de la variación, tanto en contextos gráficos como numéricos.

Referencias Bibliográficas

- Caballero-Pérez, M. y Cantoral, R. (2017). Una caracterización de la noción sistema de referencia para el tratamiento del cambio y la variación. En L. A. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 1057–1065. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Caballero-Pérez y Moreno-Durazo, (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. En Serna, L. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 1066 – 1074. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría, Centro de investigación y estudios avanzados del IPN, México.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon* 42, 353–369.
- Cantoral, R. (2016 2ª ed.). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa
- Hernández-Zavaleta, J y Cantoral, R. (2017). El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y las acciones en las prácticas predictivas. En L. A. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 1009–1017. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Johnson, H. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics*, 88, 89-110.

Autores:

Mario Caballero-Pérez. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.
macaballero@cinvestav.mx

Angélica Moreno Durazo. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.
gamoreno@cinvestav.mx