Revisando el asunto del límite en el contexto de la formación escolar de ingenieros

José Ismael Arcos Quezada

Resumen:

Desde hace poco más de dos décadas, en la FIUAEMex se ha venido trabajando en una presentación de los cursos de Cálculo en los que se considere, como un propósito básico de estos, el facilitar al estudiante el entendimiento y uso de los conceptos propios de las ciencias de la ingeniería. Procediendo de esta manera, se ha concluido, entre otras cosas, que las ideas relacionadas con lo infinitamente pequeño deben tener cabida, al contrario de lo que usualmente se observa en los textos, y, por lo tanto, de lo que ocurre en las aulas. Esto, por supuesto, modifica considerablemente la presentación de los conceptos del Cálculo, y tal vez el cambio más considerable sea que, la diferencial, como incremento infinitamente pequeño de una cantidad variable, vuelve a ser el concepto central (en lugar del de límite), tal como ocurría en el Cálculo de sus orígenes, particularmente en su versión leibniziana. En este contexto cabe reflexionar sobre temáticas específicas del Cálculo que, por una parte, han tenido mucha importancia en la presentación tradicional de los textos de Cálculo (digamos en las últimas cinco décadas), mientras que, en los cursos de Ciencias de la ingeniería, no tienen la misma relevancia. En este trabajo se aborda el caso del cálculo del límite cuando se presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Palabras clave: cálculo diferencial, formación de ingenieros.

I. Introducción

Como puede observarse, en (prácticamente todos) los textos de Cálculo, respecto de la temática relacionada con el concepto de límite, resulta importante dar respuesta a cuál es el límite de una función f, definida por medio de un cociente de otras dos funciones $\left(f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\right)$, cuando la variable tiende a un valor a, para el cual ambas funciones (numerador y denominador) valen cero $(p(a) = q(a) = 0)$, es decir, cuando se presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Es este sentido, cuando se presenta la definición de límite y los teoremas para el cálculo del límite (de una función en un punto), se consideran algunos casos simples, por ejemplo, cuando se factorizan numerador y denominador, con $x - a$ como factor en ambos casos. Para casos más complejos la respuesta se da hasta después de definir la derivada, introduciendo la "regla de L'Hôpital", por medio de la cual se puede calcular el límite para esta y otras formas indeterminadas.

En cuanto a la interpretación gráfica, el asunto parece no ser tan importante y se aborda posteriormente, hasta que se habla de la continuidad, indicando que la discontinuidad "evitable" ocurre cuando $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = L$, pero $f(a) = \frac{p(a)}{q(a)}$ no existe (ya que $p(a) = q(a) = 0$), de manera que la gráfica de f tendrá un hueco en lugar del punto (a, L).

II. Desarrollo

En el caso de las escuelas de ingeniería, cabe preguntarse, primeramente, qué tan importante es indicar que a la gráfica sólo le hace falta un punto, o bien si podemos “ignorar el agujero” indicando que el cálculo del límite nos sirve para ver “por qué punto pasa la gráfica de $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ cuando $x = a$, sabiendo que $p(a) = q(a) = 0$”, tal como lo indicara el célebre marqués de L’Hôpital (1998) en su *Análisis de los infinitamente pequeños*, escrito a fines del siglo XVII.

Veamos, en la sección IX, titulada “Solución de algunos problemas que dependen de los métodos precedente”, en la proposición I se aborda el siguiente problema:

> §163. *Sea* AMD *una línea curva* (*AP* = *x*, *PM* = *y*, *AB* = *n*) *tal que el valor de la ordenada y esté expresado por una fracción, en la cual el numerador y el denominador se vuelvan cada uno cero cuando x* = *a*; *es decir, cuando el punto P caiga sobre el punto dado B* [fig. 130] (figura 1 en este documento). *Se pregunta cuál debe ser entonces el valor de la ordenada BD*.

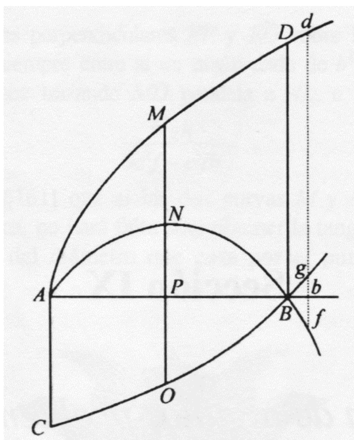

Figura 1. Proposición 1 de la sección IX del *Análisis* de L’Hôpital. Figura tomada de la fuente consultada

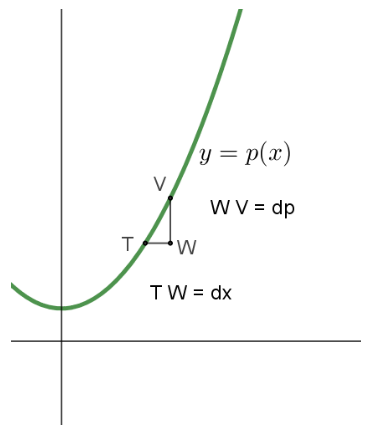

Figura 2. Diferencial de una función en el cálculo leibniziano.

Y enseguida se explica:

> Siendo *ANB* y *COB* dos líneas curvas conocidas que tienen a *AB* como eje común, y tales que la ordenada *PN* exprese el numerador y la ordenada *PO* del denominador de la fracción general que conviene a todas las *PM*, de modo que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$.
>
> Es claro que estas dos curvas se intersectarán en el punto B, dado que, por la suposición, PN y PO se vuelven cada una cero cuando el punto P cae en B. Planteado eso, si se concibe una ordenada bd infinitamente cercana de BD y que intersecta a las líneas curvas ANB y COB en los puntos *f* y *g*, se tendrá $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$.
>
> Lo cual no difiere de *BD* [§2]. Entonces el problema consiste en encontrar la razón entre bg y bf. Ahora bien, es claro que al volverse *AB* la Abscisa *AP*, las ordenadas *PN* y *PO* se vuelven nulas, y que al volverse *Ab* la abscisa *AP*, se vuelven *bf* y *bg*. De donde se sigue que estas ordenadas, las mismas *bf* y *bg*, hacen la diferencia de las ordenadas en *B* y *b* con relación a las curvas *ANB* y *COB*, y por lo tanto, si se toma la diferencia del numerador y se divide por la diferencia del denominador, después de haber hecho $x = a = Ab = AB$, se tendrá el valor buscado de la ordenada *bd* o *BD*. Lo cual se quería encontrar.

Utilizando esas ideas, pero recurriendo a notación actual, podemos interpretar el texto anterior más o menos como sigue (ver figura 2): Si T y V son dos puntos, infinitamente próximos entre sí, de la gráfica de la función $y = p(x)$, entonces el incremento (infinitesimal) de la variable x, que ocurre mientras el punto "se mueve" de T a V es $dx = \mathrm{TW}$, mientras que el correspondiente incremento de y, es decir de p es $dy = dp = \mathrm{WV}$. De esta manera tenemos que, en general, $p(x + dx) = p(x) + dp$, así que, siendo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ y $p(a) = q(a) = 0$, tendremos que $f(a + dx) = \frac{p(a+dx)}{q(a+dx)} = \frac{p(a)+dp}{q(a)+dq} = \frac{dp}{dq}$ que es lo que afirma L'Hôpital.

Regresando al *Análisis*, el autor continúa con un ejemplo:

> §164. Sea $\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$. Es claro que cuando $x = a$, el numerador y el denominador de la fracción se vuelven iguales a cero. Por lo cual se tomará la diferencia del numerador, $\frac{a^3dx-2x^3dx}{\sqrt{2a^3-x^4}} - \frac{a^2dx}{3\sqrt[3]{ax^2}}$ y se le dividirá entre la diferencia del denominador, $-\frac{3a\,dx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$, después de haber hecho $x = a$, es decir, que se dividirá $-\frac{4}{3}a\,dx$ entre $-\frac{3}{4}dx$, lo cual da $\frac{16}{9}a$ para el valor buscado de *BD*.

Recurriendo nuevamente a notación actual, si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$, entonces $dp = d\left(\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}\right) = \left[\frac{1}{2}(2a^3x - x^4)^{-1/2}(2a^3 - 4x^3) - \frac{a^3}{3}(a^2x)^{-2/3}\right]dx$ y $dq = \left[-\frac{3}{4}(ax^3)^{-3/4}(ax^2)\right]dx$. Haciendo $x = a$ estas expresiones se reducen a $dp = \left[\frac{1}{2}(2a^4 - a^4)^{-1/2}(2a^3 - 4a^3) - \frac{a^3}{3}(a^3)^{-2/3}\right]dx = \left[\frac{1}{2}a^{-2}(-2a^3) - \frac{a^3}{3}a^{-2}\right]dx = -\frac{4}{3}a\,dx$ y $dq = \left[-\frac{3}{4}(a^4)^{-3/4}(a^3)\right]dx = -\frac{3}{4}dx$. Por lo tanto $\frac{dp}{dq} = \frac{-\frac{4}{3}a\,dx}{-\frac{3}{4}dx} = \frac{16}{9}$, que es lo que afirma L'Hôpital.

Si, por ejemplo, $a = 1$, tenemos que $f(x) = \frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$ y, el resultado anterior nos indica que $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}} = \frac{16}{9}$, de manera que, en términos de L'Hôpital, la gráfica de f "pasa" por el punto $\left(1, \frac{16}{9}\right)$, o bien, en términos del Cálculo escolar actual, que la gráfica de f tiene un hueco en lugar del punto $\left(1, \frac{16}{9}\right)$. Lo anterior puede verificarse fácilmente con un software de graficación.

III. Reflexiones

Los conceptos del Cálculo que resultan relevantes en el contexto de las Ciencias de la Ingeniería, tanto si se trata de modelación como de resolución de problemas, pueden abordarse con las ideas infinitesimalistas, tal como aquí se hizo aquí con el cálculo del límite, o como Arcos y Sepúlveda (2011) hicieron con el asunto de la diferencial de área. Esta perspectiva resulta válida cundo se trata de cursos dirigidos a estudiantes de ingeniería.

Referencias Bibliográficas

Arcos, I., Sepúlveda, D. (2011). La diferencial de área. Una perspectiva infinitesimalista. El Cálculo y su enseñanza, 3, 19-33.

L'Hôpital, M. de. (1998), Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas. Ciudad de México: UNAM. (Versión en español del original en francés: Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, de 1696. Traducción e introducción de Rodrigo Cambray).

Autor:

José Ismael Arcos Quezada. Universidad Autónoma del Estado de México, México.
ismael_arcos@msn.com