Una visualización del método de Euler: un análisis variacional de su uso

Rodolfo David Fallas Soto, Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza

Resumen:

En este trabajo mostramos que, al dibujar puntos y rectas con cierta racionalidad, podemos determinar aproximaciones de la solución de la ecuación diferencial ordinaria. Lo anterior, fue parte de una interpretación visual obtenida de una problematización realizada alrededor de la solución de la ecuación diferencial ordinaria. La investigación la realizamos desde el enfoque socioepistemológico alrededor de la problematización del Teorema de Existencia y Unicidad en las Ecuaciones Diferenciales. Esto nos permitió obtener diferentes miradas alrededor del objeto, que desde a partir de las prácticas, nos dio a conocer lo desconocido. Presentamos solamente una parte de la investigación que se viene robusteciendo, y es ofrecer la interpretación visual del método de Euler en sistemas de ecuaciones diferenciales, ecuaciones diferenciales de orden superior e inecuaciones diferenciales.

Palabras clave: socioepistemología, método de Euler, visualización, variación.

I. Introducción

En cursos universitarios de matemática, en ocasiones se enseña el método de Euler y se muestra desde un estudio numérico la aproximación de la solución de la ecuación diferencial. Dada la centración que se tiene con el objeto matemático, dicho tratamiento escolar puede llegar a caer en procesos metódicos o algorítmicos, que en parte no es malo, pero nos opacan la funcionalidad que puede tener en particular este método para comprender otros problemas en matemática, como lo es la existencia y unicidad de la solución reportado en (Fallas-Soto, 2015; Fallas-Soto y Cantoral, 2016).

Metodológicamente, el primer acercamiento fue la realización de una problematización alrededor del teorema de existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial, estudiando el desarrollo de este conocimiento en los trabajos de Cauchy y Moigno (1844), Lipschitz (1868, 1888) y Peano (1973) trabajo recopilado de 1888. En las obras matemáticas se observa en común al uso del método de Euler para determinar si existe o es única dicha solución, además no solo lo trabajan para las ecuaciones diferenciales de primer orden, Lipschitz lo desarrolla para el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y Peano brinda una interpretación axiomática a las inecuaciones diferenciales ordinarias.

En dicho método, al que llamamos variacional, puede formar parte de un modelo predictivo, si se propicia el desarrollo de prácticas como la comparación, estimación, seriación y predicción, alcanzando una comprensión de la expresión analítica de la ecuación diferencial, con procesos numéricos y una visualización. Esto fue lo que se evidencia al desarrollar dicha problematización. A continuación, mostramos parte de las construcciones realizadas de la interpretación de las obras matemáticas estudiadas.

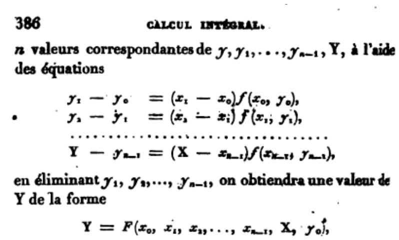
II. Desarrollo

En las obras matemáticas se considera la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$y' = f(x, y)$$

con la condición inicial (x_0, y_0) y suponiendo (en algunos casos) la continuidad de las funciones $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en una vecindad de la condición inicial. Se inicia la prueba de la existencia de la solución con el método de las quebradas, método utilizado por Euler para determinar la solución de la ecuación.

Las prácticas que predominan acá son la estimación en la determinación de valores numéricos que aproximan a la solución de la ecuación, y la seriación al realizar comparación de comparaciones, es decir, encontrar una relación entre un estado y otro, en muchos casos se logra obtener la solución analítica de la ecuación diferencial al determinar un patrón, mientras que en otros casos, solamente se predice el valor de las coordenadas que tendrá el siguiente punto de la solución numérica de la solución.


386 CALCUL INTÉGRAL.

n valeurs correspondantes de $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$, Y, à l'aide des équations

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y - y_{n-1} &= (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{aligned}$$

en éliminant $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, on obtiendra une valeur de Y de la forme

$$Y = F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X, y_0),$$

Ilustración 1. Método de Euler. Fuente: Cauchy & Moigno (1844, pág. 386)

Con apoyo de las ideas que nos brinda el problema inverso de la recta tangente e interpretando el método de Euler, se construye una explicación numérica y visual del problema.

La ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ representa la pendiente de la recta tangente en cualquier punto dado de la solución en cualquier instante de tiempo, partiendo desde la condición inicial (x_0, y_0). A partir de lo anterior, se puede determinar la expresión analítica de la recta tangente que pasa por la condición inicial:

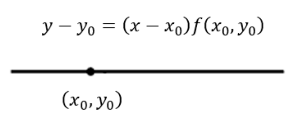


Ilustración 2. Primera iteración del método de las quebradas

Esta recta tangente representa la función lineal que mejor aproxima a la curva solución en el punto dado. Luego, se toma otro punto muy cercano al valor inicial y que es parte de la recta que se acaba de determinar. Este punto se denotará por (x_1, y_1). Al tener este nuevo punto y la ecuación diferencial, se puede determinar la expresión analítica de la recta que pasa por este nuevo valor y así determinar otra recta que aproxima a la solución en un vecindario de (x_1, y_1).

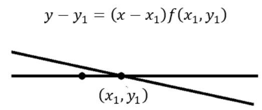


Ilustración 3. Segunda iteración del método de las quebradas

Continuando con este método, se van obteniendo tantos puntos como sean necesarios, formando una aproximación numérica de la solución de la ecuación diferencial a partir de las rectas que se van determinando con este método.

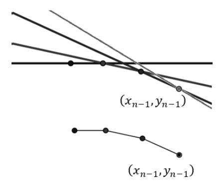


Ilustración 4. N-ésima iteración obteniendo una aproximación numérica de la solución

Al final, ese conjunto de valores corresponde a una aproximación numérica de la solución de la ecuación diferencial que se puede visualizar al graficar dichos puntos obtenidos. Por lo tanto, se aproxima la solución utilizando los puntos obtenidos por aproximaciones locales de Taylor de primer orden. Para la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden se aproximará localmente con polinomios de Taylor de segundo orden para obtener un comportamiento global a partir de un estudio local.

III. Conclusiones

Además de lo mostrado anteriormente, desarrollaremos una interpretación visual del método de Euler ante las ideas de Peano y las inecuaciones diferenciales. Por otro lado, se mostrará ejemplos del uso del método en sistemas de ecuaciones diferenciales. Por último, se señala la importancia que tuvo el aplicar un cambio infinitamente pequeño en la condición inicial y la transformación que hace este método al teorema de existencia y unicidad como parte de un modelo predictivo.

Algunas conclusiones que se mostrarán es la diferencia del tratamiento algorítmico que se realiza en cursos de matemáticas (en algunos casos) ante toda la interpretación y usos que mostramos en este trabajo, que nos lleva a más que una aproximación de un siguiente valor. Además, se muestra como un comportamiento lineal nos lleva a predecir comportamientos no lineales, como parte de una característica que tiene este método como herencia del polinomio de Taylor. Concluyendo que este método variacional resulta poderoso ante situaciones donde se tenga que deducir el comportamiento de fenómenos o estados futuros.

Referencias Bibliográficas

Cauchy, A., & Moigno. (1844). Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Integral. Paris: Libraire de École Polytechnique

Fallas-Soto, R. (2015). Existencia y unicidad: estudio socioepistemológico de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, Departamento de Matemática Educativa, Ciudad de México.

Fallas-Soto, R., & Cantoral, R. (2016). Estudio Socioepistemológico del teorema de existencia y unicidad en las ecuaciones diferenciales ordinarias. História da Educação Matemática, 2(3), 256-280

Lipschitz, R. (1868). Disamina della pknossibilità d' integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie . Annali di Matematica pura ed applicata, 2(2), 288–302.

Lipschitz, R. (1880). Lehrbuch der Analysis. Bonn, Deutschland: Verlag Von Max Cohen & Sohn

Peano, G. (1973). Sull' integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine. Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino 21 (1885-1886): 677–685. Hamburger which was reprinted in *Peano 1957-1959*, 74–81

Autores:

Rodolfo David Fallas Soto. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.
rfallass@cinvestav.mx
Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.
rcantor@cinvestav.mx