

La causalidad y la temporización en la construcción de la variación. Un estudio socioepistemológico de la constitución de sistemas de referencia variacionales

Mario Caballero-Pérez, Ricardo Cantoral

Resumen:

Presentamos los resultados de una investigación que se enfoca en explicar cómo se construye la noción de variación en el pensamiento humano. Para ello, nos planteamos por objetivo analizar la noción de variación construida por estudiantes de un bachillerato tecnológico de México (CETis 50) y entender los mecanismos que favorecen o influyen en su construcción en actividades matemáticas con escenarios predictivos. En concreto, nos interesamos en comprender *¿cuáles son los elementos o condiciones necesarias para favorecer la construcción de la noción de variación en el pensamiento humano?*

Palabras clave: variación, socioepistemología, casualidad y temporización.

Nuestra hipótesis de investigación consistió en que la construcción de la variación precisa del desarrollo de dos nociones propias de la psicogenética, la *causalidad* y la *temporización*. Por una parte, la variación requiere una cuantificación del cambio en las variables de un fenómeno, pero no de cualquier variable sino de aquellas que están relacionadas causalmente. Normalmente el tratamiento escolar provee esas variables y se espera que el alumno caracterice su comportamiento, pero la revisión literaria nos han dejado ver que sin la previa construcción de *relaciones causales* esto se torna en algo de naturaleza memorística y sin significado. Por otra parte, la variación expresa la dinámica de las variables estudiadas y da cuenta de su evolución en diversos estados del fenómeno, por tanto, se requiere reconocer y, en su caso, construir estados intermedios en el desarrollo del fenómeno, a lo que llamamos realizar una *temporización*, ya que sin esto la cuantificación del cambio no tiene lugar.

En nuestra investigación entendemos por *cambio* toda modificación que tiene el valor de una variable que, de manera general, puede ser percibe por los sentidos. En contraste, la variación es una noción que no se percibe de manera directa por los sentidos, sino que consiste de una abstracción de orden superior de las propiedades y características del cambio percibido (Cabrera, 2009). En consecuencia, observar el cambio o ser consiente de él no es suficiente para caracterizar a la variación (Cantoral, 2016), se requiere de al menos dos aspectos para realizar esta abstracción: la medición del cambio (reconocimiento cuantitativo de aquello que cambia) y el estudio de la forma en cómo esa medida se modifica (si los incrementos son positivos, negativos, constantes, si son cada vez mayores o menores).

Las investigaciones enmarcadas en el PyLV han centrado la atención en dos aspectos de la variación: los órdenes de variación superior y el carácter estable del cambio. En cuanto al primero, se considera que la variación posee diferentes órdenes (Hernández-Zavaleta y Cantoral, 2017), siendo el primer orden la medición del incremento en el valor de la variable y el segundo orden la

medición del incremento en el incremento del primer orden de variación, y así sucesivamente para órdenes superiores; por ejemplo, un problema de movimiento en la Física refiere al primer orden de variación con el cambio de posición (velocidad) y el segundo al cambio de velocidad (aceleración).

El *carácter estable del cambio* (Cantoral y Farfán, 1998) es un elemento necesario para establecer predicciones, consiste en aquella regularidad asociada a la variación que determina el comportamiento de los estados ulteriores del fenómeno, esto se logra al caracterizar la dinámica que siguen las variables y sus variaciones. Por ejemplo, en una secuencia numérica el carácter estable del cambio consiste en la regularidad que determina el término enésimo.

La causalidad y la temporización son dos nociones que retomamos de la psicogenética, y que han sido desarrollados a la luz de los resultados dentro del PyLV en (Caballero-Pérez y Cantoral, 2017). La causalidad consiste en relacionar dos o más variables en un fenómeno, esto es, reconocer que la modificación de una variable resulta en la modificación de otra. La temporización consiste en identificar o construir estados intermedios en el desarrollo del fenómeno, asociando estados específicos a las variables estudiadas.

La causalidad y temporización atienden diferentes aspectos de la variación que se resumen en las interrogantes ¿qué cambia?, ¿respecto de qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia? La manera en cómo estas cuestiones se articulan para que la noción de variación emerja es a lo que denominamos *sistema de referencia* (Cantoral, Moreno-Durazo y Caballero-Pérez, 2018). Lo elementos que conforman al sistema de referencia son la selección de variables (lo que se percibe que cambia), el elemento de referencia (cómo se reconoce el cambio), la unidad de medida (cómo se mide la intensidad del cambio) y la temporización (cómo se reconoce la evolución del cambio).

La investigación fue de corte cualitativo-interpretativo, ya que analizamos las respuestas de estudiantes para identificar y explicar cómo construyeron la variación en actividades matemáticas de predicción con base en la noción de sistema de referencia. Las actividades se diseñaron considerando órdenes de variación diferentes en cada actividad y el planteamiento de preguntas de predicción, que fueron implementadas a 40 estudiantes de cuarto semestre del CETis 50, quienes habían cursado la asignatura de Cálculo Diferencial, complementando con entrevistas cortas durante la resolución de las actividades.

Para el análisis se identificó las prácticas desarrolladas en cada respuesta, luego se caracterizó la noción de variación construida mediante los órdenes de variación y el carácter estable del cambio. Por último, se analizó el sistema de referencia y cómo influyó en la noción de variación construida.

Presentamos, a modo de ejemplo, una de las actividades diseñadas que muestra la velocidad de un vehículo durante una vuelta de preparación para una carrera de Fórmula 1 y se le pide al estudiante dibujar la pista que considera es la adecuada según la tabla 1.

Tabla 1: Velocidad de un vehículo durante una vuelta de práctica.

Distancia m	Rapidez km/h	Distancia m	Rapidez km/h	Distancia m	Rapidez km/h	Distancia m	Rapidez km/h
50	320	450	319	850	263	1250	272
100	318	500	318	900	284	1300	282

150	314	550	309	950	305	1350	309
200	303	600	288	1000	308	1400	314
250	290	650	267	1050	311	1450	318
300	299	700	245	1100	309	1500	319
350	312	750	230	1150	286		
400	317	800	241	1200	273		

Elaboración propia

Los resultados obtenidos indican que una construcción robusta de la variación precisa de una articulación de varios elementos. Por una parte, sin una relación causal establecida por los estudiantes, la variación no es construida, presentándose respuestas que consisten de operaciones aritméticas o juicios de valor que no se sustentan en un análisis de los datos de la situación. Por otra parte, sin una construcción o identificación de estados intermedios en el fenómeno, las respuestas de los estudiantes consisten de análisis descriptivos del comportamiento de las variables, pero no de una cuantificación de esos comportamientos que favorezca la predicción de estados futuros. En pocas palabras, la variación no se presenta sin la articulación de la causalidad y la temporización.

Desde la Socioepistemología consideramos que la noción de variación, es esencial para la construcción social de conocimiento matemático ligado a conceptos de Cálculo como derivada, función, pendiente, etc. (Cantoral, 2013). Los resultados de nuestra investigación dejan ver que la construcción de la variación tiene lugar cuando los estudiantes reconocen una relación causal entre variables y construyen una temporización, lo cual en conjunto conforma un sistema de referencia desde el cual el estudiante desarrolla prácticas específicas para la predicción de estados futuros. Por tanto, es a partir de este sistema de referencia que los conceptos del Cálculo se significan, por lo que proponemos atender a la construcción de sistemas de referencia como un medio para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, pues a partir de reconocer y cuantificar a la variación el conocimiento matemático es puesto en uso mediante sistemas de referencia cada vez más especializados.

Referencias Bibliográficas

- Caballero-Pérez, M. y Cantoral, R. (2017). Una caracterización de la noción sistema de referencia para el tratamiento del cambio y la variación. En L. A. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 1057–1065. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría, Centro de investigación y estudios avanzados del IPN, México.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon* 42, 353–369.
- Cantoral, R. (2016 2ª ed.). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A. & Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8>.

Hernández-Zavaleta, J. (2017). El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional y las acciones en las prácticas predictivas. En L. A. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 1009–1017. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Autores:

Mario Caballero-Pérez. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.
macaballero@cinvestav.mx

Ricardo Cantoral. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.
rcantor@cinvestav.mx