

# **Una propuesta para la enseñanza de valores y vectores propios en un primer curso de álgebra lineal para estudiantes de ingeniería a través de una orquestación instrumental**

*José Orozco-Santiago, Armando Cuevas Vallejo, Humberto Madrid de la Vega, Luc Trouche*

## **Resumen:**

Presentamos un avance de nuestra investigación doctoral sobre las nociones de esquemas y orquestación que desarrollan los estudiantes al resolver un problema que involucra los conceptos de valores propios y vectores propios en un curso tradicional de álgebra lineal en ingeniería. Dado que utilizamos herramientas digitales y no digitales nos apoyamos en la teoría de la génesis instrumental. Como parte de la fase piloto del estudio observamos a dos estudiantes universitarios. Presentamos resultados de este caso de estudio que permitió identificar a partir de entrevistas y observaciones en clase el uso de los recursos.

**Palabras clave:** álgebra lineal, valores y vectores propios, ingeniería, orquestación.

## **I. Introducción**

Varios fenómenos que se presentan en la ingeniería se pueden aproximar a través de un modelo lineal. El álgebra lineal es una de las ramas de las matemáticas con diversas posibilidades de aplicación de sistemas lineales, tanto en la misma disciplina como en otras disciplinas (Carlson, Johnson, Lay, & Porter, 1993; Orozco-Santiago, 2014; Salgado & Trigueros, 2015). También se ha reconocido que es uno de los primeros cursos de matemáticas abstractas que los estudiantes se encuentran en sus primeros años en la universidad (Dorier, Robert, Robinet, & Rogalsiu, 2000; Thomas & Stewart, 2011). El amplio uso de las definiciones y la dependencia de los teoremas a menudo le dan al primer curso un sabor abstracto y teórico, algo que los expertos les encantan pero que a muchos estudiantes les resulta desagradable (Stewart et al., 2018).

Robert & Robinet, (1989) evidenciaron que las principales críticas hechas por los estudiantes hacia el álgebra lineal se refieren al uso del formalismo, la abrumadora cantidad de nuevas definiciones y la falta de conexión con lo que ya saben en matemáticas. Muchos estudiantes tienen la sensación de aterrizar en otro planeta y no pueden encontrar su camino en este nuevo mundo, también varios profesores sufren a causa de los razonamientos abstractos involucrados (Dorier et al, 2000). Dorier & Sierpinska (2001, pp. 256) distinguen dos fuentes inseparables de las dificultades de los estudiantes en los procesos de aprendizaje: la naturaleza misma del álgebra lineal (dificultades conceptuales) y el tipo de pensamiento necesario para la comprensión del álgebra lineal (dificultades cognitivas).

Un tema importante en el estudio del álgebra lineal son los valores propios y vectores propios, en este sentido, presentamos un informe preliminar de nuestra investigación doctoral sobre el complejo proceso de instrumentación que desarrollan los estudiantes al utilizar diversos artefactos en una situación de enseñanza para introducir los conceptos de valores propios y vectores propios en un curso tradicional de álgebra lineal en ingeniería.

## II. Antecedentes

Existen pocas investigaciones que se han realizado acerca de la enseñanza y aprendizaje de los valores propios y los vectores propios. En Thomas & Stewart (2011) reportan que los estudiantes luchan por conectar los dos procesos matemáticos capturados en  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$  (en el lado izquierdo es el proceso de multiplicar una matriz por un vector; en el lado derecho es el proceso de la multiplicación de un escalar por un vector, sin embargo, en cada lado el objeto final es un vector). Los autores ponen en relieve, que las dificultades de los estudiantes se deben al hecho de que muchos profesores y textos no introducen la geometría de valores propios y vectores propios. Explicaron que, aunque los estudiantes conocen los procedimientos algebraicos que participan en la búsqueda de valores propios y vectores propios, cuando la representación geométrica se deja a un lado y no se discute la relación de representación algebraica y geométrica, muchos estudiantes aprenden estos conceptos mecánicamente, mientras que cuando ambas representaciones se consideran en la enseñanza de estos conceptos, los estudiantes comprenden mejor los conceptos. Salgado & Trigueros (2015) reportan el diseño de una situación al tomar un modelo económico como referencia, paralelamente, diseñaron una descomposición genética preliminar para los conceptos de valor propio, vector propio y espacio propio. Asimismo, se diseñó un cuestionario en términos de la descomposición genética. Los resultados de las entrevistas mostraron que algunos estudiantes presentaron algunas dificultades que parecen difíciles de superar, por ejemplo, la relación entre el número de vectores propios que corresponden a un valor propio dado y su coordinación con la dimensión del espacio generado por los vectores propios asociados a cada valor propio. La construcción del concepto de espacio propio también resultó ser difícil para la mayoría de los estudiantes.

## III. Marco teórico

Dado que utilizamos herramientas digitales y no digitales nos apoyamos en la teoría de la génesis instrumental. Un paso importante en la ergonomía cognitiva es la diferencia que hacen entre el artefacto y el instrumento. Según Rabardel (1995), un instrumento es un constructo psicológico, es una entidad mixta, constituida por un artefacto y un esquema, y es en la génesis instrumental que la relación entre ambos se establece. La génesis instrumental es un proceso de construcción de un instrumento a partir de un artefacto. Tiene dos procesos estrechamente interconectados: la *instrumentalización* y la *instrumentación*. El proceso de instrumentación (dirigida hacia el artefacto), se trata de lo que el estudiante piensa que el artefacto fue diseñado y cómo la utiliza. El proceso de instrumentación (dirigida hacia el sujeto), es el proceso por el cual el artefacto imprime su marca en el sujeto.

En un salón de clases el profesor trabaja no sólo con un tipo de tecnología, muchas veces trabaja con una diversidad, trabaja con tecnología papel-lápiz, con tecnologías digitales, pero estas pueden ser también muy diferentes, pueden ser calculadoras, pizarra interactiva, programas matemáticos. Para tomar en cuenta esta complejidad se ha introducido la idea de la *orquestación instrumental*, Trouche (2004) introdujo esta noción para mostrar que el profesor debe organizar una configuración didáctica con todos los artefactos que va a utilizar, y también debe de organizar la manera de explotar esa configuración didáctica. Dentro de una orquestación instrumental, distinguimos tres elementos: una configuración didáctica, un modo de explotación y un rendimiento didáctico (Drijvers, Doorman, Boon, Reed, & Gravemeijer, 2010; Drijvers, Tacoma,

Besamusca, Doorman, & Boon, 2013). El profesor utiliza la tecnología en su salón de clase con los estudiantes, pero utiliza aún más la tecnología fuera del salón de clase para preparar su trabajo con los estudiantes, para buscar cosas en el internet, para hacer hojas de trabajo (Gueudet, 2017; Gueudet, Pepin, & Trouche, 2012).

#### **IV. Metodología**

Se diseñó una orquestación para implementar un curso de álgebra lineal en una universidad mexicana con estudiantes de ingeniería (5° Semestre - 3er año) en un laboratorio de computación con computadoras conectadas a Internet, equipadas con un Entorno de Geometría Dinámica (DGE), en particular Geogebra. El primer autor fue el profesor del estudio, considerando que otro maestro necesitaría una preparación previa del problema de la aplicación.

La recopilación de datos se realizó a partir de: observación de clase, producción escrita de estudiantes en sus cuadernos, hojas de trabajo de los estudiantes, evaluación escrita y notas de campo. Se implementan cinco orquestaciones: dos centradas en el profesor (técnica-demo y discuss-the-problem) y tres centradas en el alumno (technical-support, sherpa-at-work y spot-and-show).

#### **V. Conclusión**

Aunque se planificó la integración de la tecnología, para disminuir el tiempo de resolución y los errores en los cálculos aritmético-algebraicos. No se realizó una cuidadosa orquestación para explicar los procesos de adquisición por parte de los estudiantes.

#### **Referencias Bibliográficas**

- Cuevas, C., & Pluvillage, F. (2003). Les projets d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 8, 273-292.
- Dorier, J.-L., & Sierpiska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, & A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Vol. 7, pp. 255-273). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Drijvers, P., Tacoma, S., Besamusca, A., Doorman, M., & Boon, P. (2013). Digital resources inviting changes in mid-adopting teachers' practices and orchestrations. *ZDM*, 45(7), 987-1001.
- Gueudet, G., Pepin, B., & Trouche, L. (Eds.). (2012). *From Text to «Lived» Resources*. Dordrecht: Springer Netherlands.
- Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (Eds.). (2005). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators* (Vol. 36). New York: Springer-Verlag.
- Orozco-Santiago, J. (2014). *Falsas interpretaciones en la solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN, Mexico.

- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin.
- Robert, A., & Robinet, J. (1989). Quelques resultats sur l'apprentissage de l'algebre lineaire en premiere année de DEUG. Cahier de didactique des mathématiques, 53.
- Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. The Journal of Mathematical Behavior, 39, 100-120.
- Stewart, S., Andrews-Larson, C., Berman, A., & Zandieh, M. (Eds.). (2018). Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra. Cham: Springer International Publishing.
- Thomas, M. O. J., & Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: embodied, symbolic and formal thinking. Mathematics Education Research Journal, 23(3), 275-296.
- Trouche, L. (2004). Managing the Complexity of Human/Machine Interactions in Computerized Learning Environments: Guiding Students' Command Process through Instrumental Orchestrations. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9(3), 281-307.

**Autores:**

**José Orozco-Santiago.** Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.  
jorozco@cinvestav.mx

**Armando Cuevas Vallejo.** Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.  
ccuevas@cinvestav.mx

**Humberto Madrid de la Vega.** Universidad Autónoma de Coahuila, México.  
hmadrid@gmail.com

**Luc Trouche.** University of Lyon-Institut Français de l'éducation, Eductice, Francia.  
luc.trouche@ens-lyon.fr